SERIES DE POTÈNCIES

O QUAN UNS POLINOMIS DE TAYLOR PREFABRICATS DEFINEIXEN FUNCIONS

Natàlia Castellana, 2021.

Recordeu els polinomis de Taylor per una funció contínua i derivable $f(x)$ en un punt $x=a$.

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$
$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$
$$\vdots$$
$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

$P_n(x)$ és la "millor" aproximació polinomial en grau n a la funció $f(x)$ al voltant de $x=a$.

Com més és el grau, millor és l'aproximació.

Puc agafar el polinomi "infinit"? Té sentit
$$P_\infty(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i \ ?$$
Quins valors pren si és $P_\infty(x)$ és un número?

Fixeu-vos que $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \in \mathbb{R}$, aleshores $\{a_n\}$ és una successió i $P_\infty(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$

Si pren a_n qualsevol, és $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, hi ha una funció tal que els seus polinomis de Taylor son
$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x-a)^i \ ?$$

Recordeu quan vam calcular polinomis de Taylor per funcions elementals.

$f(x)=e^x$, en 0 , $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$, $a_n = \frac{1}{n!}$

ja que $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

$f(x) = \sin(x)$ en 0 , $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1!}$

ja que $P_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1!} x^{2n+1}$

$f^{(2n)}(0) = 0$

$f(x) = \cos(x)$ en 0 , $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^{2n}$, $a_n = \frac{(-1)^n}{2n!}$

ja que $P_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}$

$f^{(2n+1)}(0) = 0$

$f(x) = \ln(1+x)$ en 0 , $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$, $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

ja que $P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

<u>DEFINICIÓ</u> Una sèrie de potències centrada en $a \in \mathbb{R}$ és una expressió del tipus

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$ on $\{a_n\}$ és una successió de nombres reals.

Podem pensar que és una sèrie numèrica que depèn d'un paràmetre x i que segons el seu valor serà convergent o no.

El més usual és $a=0$. Anem a veure uns exemples

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n, \dots$$

Agafem la primera $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ podem pensar que és una sèrie geomètrica de raó $r = x$, $a_0 = 1$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

Si pensem que x és un paràmetre aleshores sabem que és

- convergent si $|x| < 1$
- divergent si $x \geq 1$
- no existeix si $x < -1$

A més, si $|x|<1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{a_0}{1-r} = \frac{1}{1-x}$

És a dir, si defineixo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

aleshores és una funció amb domini $(-1,1)$ (només quan convergeix i dóna un número) però a més podem identificar-la

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{si} \quad x \in (-1,1).$$

Anem a fer un altre exemple

EXEMPLE $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{5^n} x^n$, $a_n = \dfrac{n}{5^n}$.

Per quins valors de x és convergent? És a dir, si defineixo $f(x) = \sum_{n=0} \frac{n}{5^n} x^n$, quin és el seu domini?

- És absolutament convergent? recordeu que x podia prendre valors negatius.

És $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{n}{5^n} x^n\right|$ convergent? Mirem el criteri del quocient:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{n+1}{5^{n+1}} x^{n+1}}{\frac{n}{5^n} x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1) x^{n+1} 5^n}{n x^n 5^{n+1}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)x}{n \cdot 5} \right| = \frac{|x|}{5}$$

; Què diu el criteri?

(a) Si $\frac{|x|}{5} < 1$ alshores la serie és absolutament convergent i per tant convergent.

És a dir, si $|x| < 5$, és a dir, $x \in (-5,5)$ la sèrie és convergent.

(b) Hem de veure però que passa si $|x| \geq 5$.
Anem cas per cas:

- Si $x > 5$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{5} x^n$ és una serie de termes positius i el criteri del quocient em diu que és divergent.

- Si $x < -5$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{5} (-1)^n (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{5} (-x)^n$
$-x > 5$
és una serie alternada però

$$\lim_{n \to \infty} (-x)^n \cdot \frac{n}{5} \neq 0 \quad \text{si} \quad -x > 5$$

per tant també és divergent.

- Si $x = 5$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{5^n} 5^n = \sum_{n \geq 0} n$ divergent
- Si $x = -5$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{5^n} (-5)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n (-1)^n$ divergent

Així $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{5^n} x^n$ convergeix sii $x \in (-5,5)$. Per tant $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{5^n} x^n$ és una funció amb domini $(-5,5)$

EXEMPLE $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$, en aquest cas $a_n = \frac{x^n}{n!}$.

Comencem amb la convergència absoluta i el criteri del quocient, com abans.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}\, n!}{x^n\,(n+1)!}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{n+1}\right| = 0 < 1$$ Aleshores el criteri del quocient em diu que sempre és convergent, per qualsevol valor de x.

Si prenem $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ té domini $\mathbb{R}$!

Us sona? És una coneguda funció elemental

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Així $e = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

Què passa en general? Donada una sèrie de potències

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

es donarà una d'aquestes situacions:

a) Només és convergent en $x=a$.

b) Convergent per tot $x \in \mathbb{R}$

c) Existeix $0 < R < \infty$ tal que la sèrie convergeix en un interval de la forma $(a-R, a+R)$, $[a-R, a+R)$, $[a-R, a+R]$, $[a-R, a+R]$

R es diu el radi de convergència, i el domini de $f(x) = \sum a_n (x-a)^n$ es diu l'interval de convergència i serà de la forma

$$\{a\},\ (a-R, a+R),\ [a-R, a+R),\ (a-R, a+R],\ [a-R, a+R],\ \mathbb{R}.$$

Com es calcula R?

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$ (conveni $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$)

Els casos $x = a-R$, $x = a+R$ s'estudien a part.

EXEMPLES (1) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Calculem R, $a_n = 1$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to \infty} \frac{|x^{n+1}|}{|x^n|} = \lim_{n \to \infty} 1 = 1, \quad R = 1.$$

Ja sabem que $f(x)$ està definida en $(-1, 1)$.

Anem a fer $x=1$ i $x=-1$.

$\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ divergent

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ divergent

El radi de convergència és $R=1$ i l'interval de convergència és $(-1,1)$., $f(x)=\frac{1}{1-x}$ si $x\in(-1,1)$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $a_n=\frac{1}{n!}$

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{|1/_{n+1}!|}{|1/_{n!}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n+1!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

Aleshores $R=\frac{1}{0}=\infty$.

El radi de convergència és ∞ i l'interval de convergència és $\mathbb{R}$. $f(x)=e^x$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$, $a_n=n^n$

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\underset{\downarrow \atop \infty}{(n+1)}\cdot\underset{\downarrow \atop e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\infty, \quad R=\frac{1}{\infty}=0$$

Per tant, el radi de convergència és $R=0$ i l'interval de convergència és $\{0\}$.

Només convergeix quan $x=0$ i $\sum_{n\geq 0} n^n 0^n = 0$.

Veurem un resultat final per identificar les derivades ja que els coeficients són les derivades.

<u>TEOREMA</u>: Sigui $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ una sèrie de potències amb radi de convergència R. Llavors la sèrie derivada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-a)^{n-1}$$

té el <u>mateix</u> radi de convergència R. Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, $x \in (a-R, a+R)$

alshores $f(x)$ és derivable i

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-a)^{n-1}, \quad x \in (a-R, a+R)$$

Anem a veure com utilitzar aquest resultat.

- Recordeu que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ si $|x| < 1$

Si derivem els dos costats de la igualtat

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \quad \text{si } |x| < 1$$

Així, si $x = \frac{1}{2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 4$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2$$

- Considerem $f(x) = \ln(1-x)$, $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

Fixeu-vos que si $|x| < 1$ tenim que

$$f'(x) = \frac{1}{1-x} \qquad g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Per tant com que $f'(x) = g'(x)$ tenim que $f(x) = g(x) + C$ on C és una constant.

$f(0) = 0$, $g(0) = 0$, així $C = 0$

$$\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{si } |x| < 1.$$

En aquest cas si $x=-1$, és convergent

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$$

però en $x=1$, no ho és, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

L'interval de convergència és $[-1,1)$ i

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

- Acabem amb un altre exemple, sigui una sèrie geomètrica de raó $-x^2$.

$$\frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^n \quad \text{si} \quad |x^2|<1$$
$$|x|<1$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad \text{si} \quad |x|<1$$

Reconeixeu la funció de l'esquerra? És la derivada de $\arctg(x)$. Si agafem $\sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ tenim

$$\arctg(x) = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad |x|<1$$