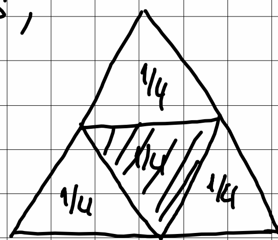
SÈRIES NUMÈRIQUES

O

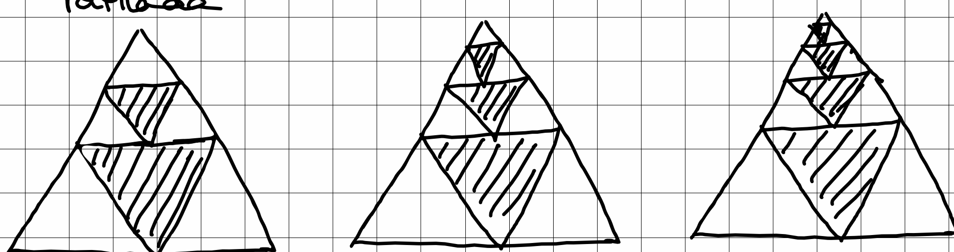
QUAN UNA SUMA D'INFINITS NÚMEROS ÉS FINITA

Natàlia Castellana, 2021

Comencem amb un problema geomètric.
Dividim un triangle equilàter d'àrea 1 en 4 iguals,



Repetim el procés amb el triangle de dalt i així successivament i calculem l'àrea de la zona ratllada



$1/4 + \frac{1}{4^2}$ $\qquad$ $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3}$ $\qquad$ $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4}$

... i així a cada a pas, en la iteració n, tindríem una àrea de la regió marcada que val $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^n}$.

Està clar que aquesta successió no supera mai 1 que és l'àrea total del triangle gran.

$$A_1 = \frac{1}{4}, \quad A_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}, \quad A_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3},$$

$$\ldots, \quad A_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n}$$

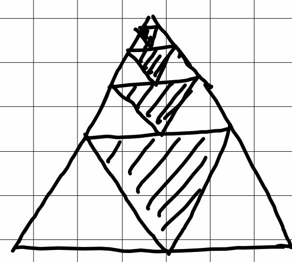
A_n és una successió creixent ja que cada cop sumem un terme positiu a l'anterior

$$A_n = A_{n-1} + \frac{1}{4^n}$$

i a més $\frac{1}{4} \leq A_n \leq 1$ ja que l'àrea total és 1.

Si continuem aquest procés fins a "infinit" quant valdrà l'àrea de la regió marcada?

És a dir $\lim_{n\to\infty} A_n$? Tornem a mirar el dibuix



Fixeu-vos que hi ha tres regions de la forma marcada: la columna de triangles de la dreta, i la columna de triangles a l'esquerra. Tenen la mateixa àrea que la central, alashores

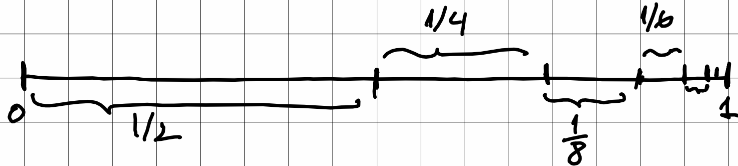
$$\text{Àrea} = \frac{1}{3}$$

I per tant

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}$$

Anem a fer un altre exemple, què passa si sumem infinites potències de 1/2 ?
Es a dir

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots$$



Doncs mirant el dibuix .... $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^n} = 1$$

Quin és el context més general en que podem plantejar aquests exemples ?

Una successió de números reals és una aplicació

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto a_n$$

Aleshores en podem construir una de nova fent la suma pas a pas

$$S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto S_n = a_1 + \dots + a_n$$

$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \dots$

Exemples

1. $a_n = (-1)^n$, qui és S_n?
$a = \{-1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$

$S_1 = -1$
$S_2 = 0$
$S_3 = -1 \quad \dots \qquad S_n = \begin{cases} -1 & n \text{ senar} \\ 0 & n \text{ parell} \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} S_n$ no existeix.

2. $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4^n}$
$S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n}$, hem vist $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{3}$

3. $a_n = \frac{1}{2^n}$, $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1$

4. $a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad S_1 = 1,\ S_2 = 1 + \frac{1}{2},\ S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

Què podem dir de $\lim_{n\to\infty} S_n$?

A veure

$$1,\ \underbrace{1 + 1/2}_{= 3/2 > 1},\ \underbrace{1 + 1/2 + 1/3}_{= 11/6},\ \underbrace{1 + 1/2 + 1/3 + 1/4}_{= 50/24 > 2},\ \dots$$

8)

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1/2}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=1/2}+\underbrace{\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{16}}_{>\frac{1}{16}+\dots+1/16=\frac{8}{16}=1/2}$$

$$+\dots+\underbrace{\frac{1}{2^{n-1}+1}+\dots+\frac{1}{2^n}}_{>1/2^n+\dots\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}>1/2}\quad (2^{n-1})$$

Atunci să prenem

$S_1=1$

$S_2=1+1/2$

$S_4=1+1/2+1/3+1/4>1+1/2+1/2=1+2\cdot 1/2$

$S_8>1+3\cdot 1/2$

$S_{16}>1+4\cdot 1/2$

En general $S_{2^n}>1+n\cdot 1/2$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2^n}>\lim_{n\to\infty} 1+n\frac{1}{2}=+\infty$$

Si $N>0$, qualsevol, atunci $1+n1/2>N$, $n>2(N-1)$ tenim que $S_{2^n}>N$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{ divergent!}}$$

(5) I si fem $a_n = \frac{1}{n^2}$?

En aquest cas la sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ és la protagonista del problema de Basilea.

L. Euler va provar $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

(6) Els polinomis de Taylor ens donen exemples de sèries convergents. Recordeu

Si $f(x) = e^x$, $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}$

Si fem la suma infinita en $x=1$ tenim

$$e = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

OBSERVACIÓ IMPORTANT! $\{a_n\}$ successió, aleshores

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

però també $a_n = S_n - S_{n-1}$

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = L$ és convergent aleshores

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - S_{n-1} = L - L = 0.$$

<u>CONCLUSIÓ</u> Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ aleshores $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent!

SERIES GEOMÈTRIQUES

Una progressió geomètrica de raó r és una successió que compleix $a_{n+1} = a_n \cdot r$

$1, 2, 4, 8, \dots, 2^n, 2^{n+1}$ $\quad a_1 = 1,\ r = 2$

$5, 15, 25, \dots$ $\quad a_1 = 5,\ r = 3$

Una sèrie geomètrica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és aquella en la qual a_n és una progressió geomètrica.

Per estudiar-la cal descriure la successió de les sumes

$$S_n = a_1 + a_1 r + \dots + a_1 r^{n-1}$$

La gran avantatja és que tenim una fórmula per la suma de termes en una progressió geomètrica

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1 r + \dots + a_1 r^{n-1} \\ - \ r S_n &= r a_1 + r^2 a_1 + \dots + a_1 r^n \\ \hline S_n - r S_n &= a_1 - a_1 r^n \end{aligned}$$

(els termes del mig es cancel·len)

$$(1-r) S_n = a_1 (1 - r^n)$$

$$\boxed{S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r} = a_1 \frac{r^n - 1}{r-1} \qquad r \neq 1}$$

Si $r = 1$, aleshores $a_n = \{a_1\}$, $\lim_{n\to\infty} a_1 = \begin{cases} 0 & a_1 = 0 \\ \infty & a_1 \neq 0 \end{cases}$

per tant si $a_1 \neq 0$ és divergent.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{r^n - 1}{r-1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{r-1} \cdot (r^n - 1)$$

Recordeu $\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |r| < 1 \\ \infty & \text{si } r > 1 \\ \nexists & \text{si } r \leq -1 \end{cases}$

Per tant, <u>CONCLUSIÓ</u> $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1}$ convergent sii només si $|r| < 1$

Aleshores, $|r| < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 r^{n-1} = \frac{a_1}{r-1} \cdot -1 = \frac{a_1}{1-r}$

<u>EXEMPLE</u>:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{4}}_{a_1} \cdot \Big(\underbrace{\frac{1}{4}}_{r}\Big)^{n-1} = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1/2}{1/2} = 1$

- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^{n-1} =$

$$= \frac{-1/3}{1+1/3} = \frac{-1/3}{4/3} = -1/4.$$

SERIES TELESCÒPIQUES

Una sèrie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és telescòpica si $a_n = b_{n+1} - b_n$ o $a_n = b_n - b_{n+1}$ per una certa sèrie b_n.

És a dir, si a_n és la diferència entre els termes d'una altra sèrie.

Per exemple,

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \text{ prenem } b_n = \frac{1}{n}$$

$$a_n = b_n - b_{n+1}$$

Aleshores

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_{n+1} - b_n)$$
$$= b_{n+1} - b_1$$

o

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + b_n - b_{n+1}$$
$$= b_1 - b_{n+1}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} - b_1 = \left(\lim_{n\to\infty} b_{n+1}\right) - b_1$$

o

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} b_1 - b_{n+1} = b_1 - \left(\lim_{n\to\infty} b_{n+1}\right)$$

CONCLUSIÓ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent $\iff \lim_{n\to\infty} b_n = L \in \mathbb{R}$

EXEMPLES

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Prenem $b_n = \frac{1}{n}$ i $a_n = b_n - b_{n+1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1$$

(2) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}.$$ Observeu que comencem amb $n=2$ ja que per $n=1$ no està definit.

$$\frac{1}{n^2-n} = \frac{1}{n(n-1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-1} = \frac{A(n-1)+Bn}{n(n-1)}$$

descomposem en suma de fraccions elementals qui són A i B?

$$1 = A(n-1) + Bn \qquad \begin{array}{ll} n=1 & 1 = B \\ n=0 & 1 = -A,\ A = -1 \end{array}$$

$$\frac{1}{n^2-n} = \frac{-1}{n} + \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$a_n = b_n - b_{n+1}$, aleshores $b_n = \frac{1}{n-1}$, $b_2 = 1$

$$\sum_{n=\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2-n} = b_2 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} = b_2 = 1$$

NOTA $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n}$$

Sempre podem determinar si una sèrie és convergent o no, i saber el valor de la seva suma si és convergent?

... doncs no! Moltes vegades podrem determinar si és convergent o no, però no sabrem el valor de la suma ...

Acabem amb unes propietats que poden ser molt útils.

(1) Si dues sèries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ són convergents aleshores es compleix que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ és convergent}$$

(2) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és convergent, $c \in \mathbb{R}$ aleshores tenim

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ és convergent.}$$