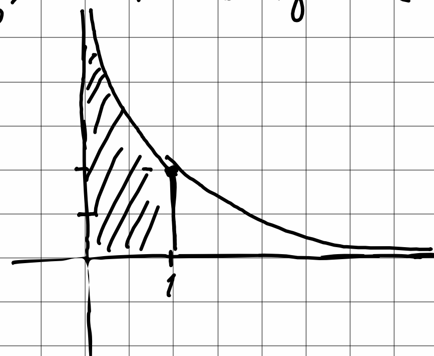
INTEGRALS IMPROPIES

... QUAN LA REGIÓ NO ESTÀ ACOTADA !

Natàlia Castellana, 2021

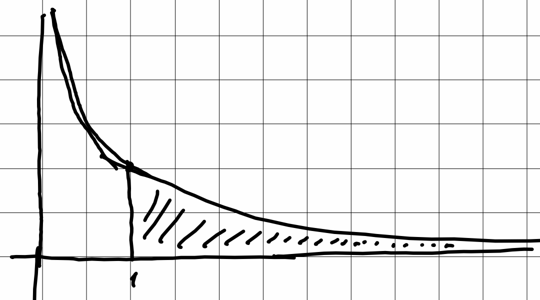
Podem calcular l'àrea entre la gràfica de $f(x) = \frac{1}{x}$, l'eix horitzontal entre $x=0$ i $x=1$?

Ⓐ



I per $x \geq 1$?

Ⓑ



Fixeu-vos que són dues regions que no estan acotades!

Penseu un moment alguna estratègia... per exemple, si enlloc de $x=0$ poso $x = 10^{-n}$ per qualsevol n, sí que puc oi? en el cas Ⓐ

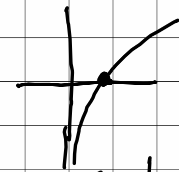
Si $x>0$ puc fer

$$\int_x^1 \frac{1}{x}\,dx$$

, el problema és canviar x per 0!

$$A = \int_y^1 \frac{1}{x}\,dx = \ln 1 - \ln y = 0 - \ln y = -\ln y$$

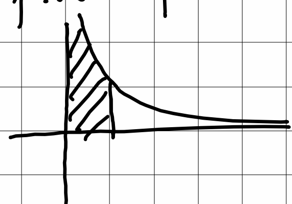
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C$$ (recordeu $\ln x < 0$ si $x < 1$)



Què fem? ... ja ho has vist, un límit!

$$A = \lim_{y \to 0} \int_y^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{y \to 0} -\ln y = +\infty$$

Bé, ens cal infinita pintura per pintar la regió



Ara bé, provem $n > 1$, $f(x) = \frac{1}{x^n}$, la gràfica és semblant

$$\int_y^1 \frac{1}{x^n}\,dx = -\frac{1}{1} - \left(\frac{-n+1}{y^{n-1}}\right) = \frac{n-1}{y^{n-1}} - 1$$

$$\int \frac{1}{x^n}\,dx = \int x^{-n}\,dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{-n+1}{x^{n-1}} + C$$

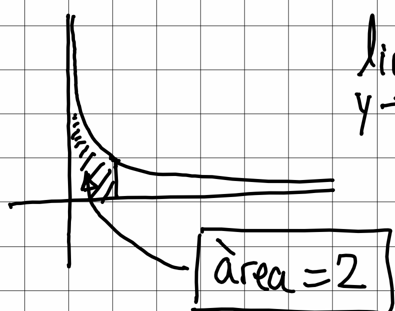
Ara $\lim_{y \to 0} \frac{n-1}{y^{n-1}} - 1 = \infty$.

I $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$?

$$\int_y^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_y^1 x^{-1/2}\,dx = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{y} = 2 - 2\sqrt{y}$$

$$\int x^{-1/2}\,dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C$$

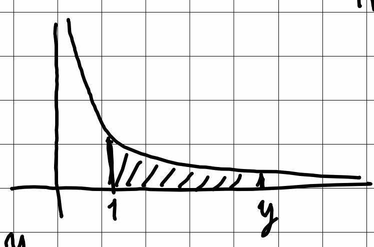
Ara bé



$$\lim_{y\to 0} \int_y^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{y\to 0} 2 - 2\sqrt{y} =$$
$$= 2$$

Podem pintar amb una quantitat finita de pintura una regió no acotada!

I (B) ?

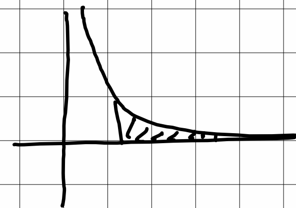


La idea és la mateixa

$$\int_1^y \frac{1}{x}\,dx = \ln y - \ln 1 = \ln y$$

$$\lim_{y\to+\infty} \int_1^y \frac{1}{x}\,dx = \lim_{y\to\infty} \ln y = +\infty$$

Però $f(x)=\frac{1}{x^2}$?



$$\lim_{y\to\infty}\int_1^y \frac{1}{x^2}dx = \lim_{y\to\infty} -\frac{1}{y}-\left(-\frac{1}{1}\right) = \lim_{y\to\infty} 1-\frac{1}{y} =$$
$$= 1$$

L'àrea val 1!

Podem tenir regions no acotades però amb àrea finita.

Una integral impròpia és una integral en que en un dels extrems d'integració la funció no està definida i aleshores prenem el límit del valor de les funcions primitives.

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{y\to+\infty}\int_a^y f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{y\to-\infty}\int_y^a f(x)\,dx$$

Si $x=b$ és una assimptota vertical per f

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{y\to b^-}\int_a^y f(x)dx \qquad \int_b^c f(x)dx = \lim_{y\to b^+}\int_y^c f(x)dx.$$

Sigui $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ una funció de manera que per tot $c\in[a,b)$, $f:[a,c]\to\mathbb{R}$ és integrable. Aleshores definim la integral impròpia

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(t)dt$$

Si el valor de la integral impròpia és $\pm\infty$ diem que és divergent, i si és un número real diem que està definida.
Si el límit no existeix aleshores diem que la integral impròpia no existeix.

EXEMPLES

1) $$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}dx =$$

$$= \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t}+1 = 1$$

PERÒ

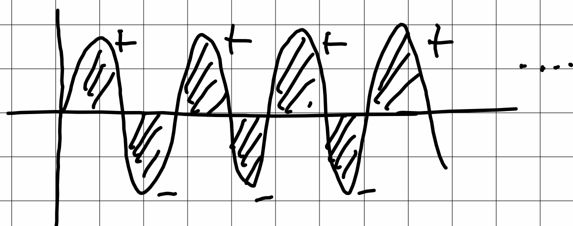
$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to\infty}\ln t =$$

$= +\infty$, és divergent.

2 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \sin(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} -\cos(t) + \cos(0)$

$$\left[\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) \right]$$

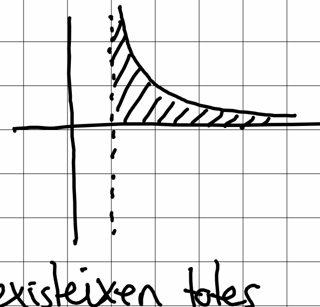
$= \displaystyle\lim_{t\to+\infty} 1 - \cos(t)$ però aquest límit no existeix



3 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to0^-} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2$ (com hem vist abans)

4 Considerem la funció $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ i ens preguntem per

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$$



Per a que existeixi cal que

$\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ i $\displaystyle\int_1^{t} \frac{1}{(x-1)^2}\,dx$ existeixen totes dues

$a>1$ $\qquad$ $t>1$

Podem partir la integral en dues parts:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^2} = \int_1^{2} \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^2} =$$

$$= \lim_{t\to 1^+} \int_t^{2} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{t\to +\infty} \int_2^{t} \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2} dx = \int (x-1)^{-2} dx = \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{x-1} + C$$

$$\int f^n \cdot f' dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int_t^{2} \frac{dx}{(x-1)^2} dx = \frac{-1}{2-1} - \left(\frac{-1}{t-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{t-1} - 1$$

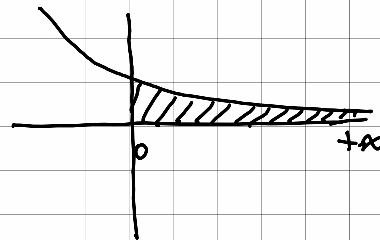
$$\int_2^{t} \frac{dx}{(x-1)^2} dx = \frac{-1}{t-1} - \left(\frac{-1}{2-1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{t-1}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{t\to 1^+} \frac{1}{t-1} - 1 + \lim_{t\to +\infty} 1 - \frac{1}{t-1} =$$

$$= +\infty + 1 = +\infty$$

⑤ $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-3x}\,dx$



$$\int_0^{+\infty} e^{-3x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^{t} e^{-3x}\,dx =$$

$$\left[\int e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}\int -3e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}+C \qquad \int e^{f}\cdot f' = e^{f}\right]$$

$$= \lim_{t\to+\infty} -\frac{1}{3}e^{-3t} - \left(-\frac{1}{3}e^{-3\cdot 0}\right) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

⑥ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx$ Fixeu-vos que si $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ aleshores no està definida en $x=0$.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx.$$

Anem a calcular la integral primer.

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + C \quad \text{ja que } \int \frac{f'}{f} = \ln|f| + C$$

Aleshores $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x}\,dx =$

$$= \lim_{t\to 0^+} \ln|\sin(\pi/2)| - \ln|\sin t| =$$

$$\doteq \ln 1 - (-\infty) = +\infty .$$

7 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ Fixeu-vos que $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ no està definida en $x=1$ ja que $\ln(1)=0$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \int_1^{2} \frac{dx}{x(\ln x)^2} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

Comencem calculant una primitiva de $f(x)$.

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \int (\ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{(\ln x)^{-1}}{-1} + C$$

$$\int f^n f' = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= \frac{-1}{\ln x} + C$$

Aleshores, ja podem calcular els límits.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^2}\,dx = \lim_{t\to 1^+} \int_t^2 \frac{dx}{x(\ln x)^2} =$$

$$= \lim_{t\to 1^+} \frac{-1}{\ln 2} - \left(\frac{-1}{\ln t}\right) = \lim_{t\to 1^+} \frac{1}{\ln t} - \frac{1}{\ln 2} =$$

$$= +\infty - \frac{1}{\ln 2} = +\infty$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{t\to +\infty} \int_2^t \frac{dx}{x(\ln x)^2} =$$

$$= \lim_{t\to +\infty} \left(\frac{-1}{\ln t}\right) - \left(\frac{-1}{\ln 2}\right) = \lim_{t\to +\infty} \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln t} =$$

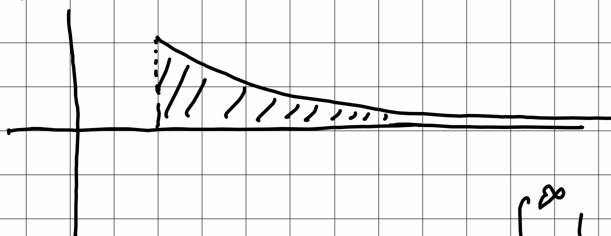
$$= \frac{1}{\ln 2} - 0 = \frac{1}{\ln 2}$$

Aleshores $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = +\infty + \frac{1}{\ln 2} = +\infty$, és divergent.

Acabem un exemple divertit ... la trompeta de Gabriel!

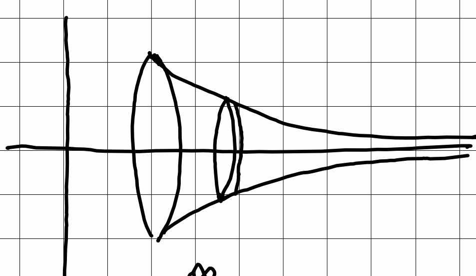
LA TROMPETA DE GABRIEL

Prenem la funció $f(x) = \frac{1}{x}$ per $[1, +\infty)$.
Hem vist que l'àrea sota la corba no és finita



$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \infty$$

Considerem el cos de revolució que s'obté al girar al voltant de l'eix OX, i calculem el seu volum.



Apliquem la fórmula del volum del cos de revolució

exemple 1

$$V = \int_1^{\infty} \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \pi \cdot 1 = \pi$$

No podem pintar la trompeta però sí omplir-la!