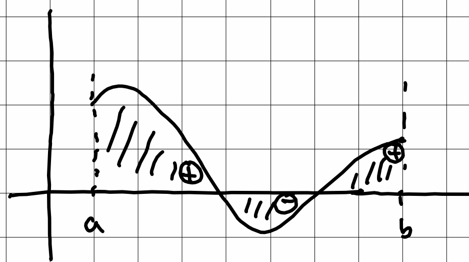
APLICACIONS DE LA INTEGRAL: MÈTODE DE CAVALIERI I ALTRES ...

Natàlia Castellana, 2021

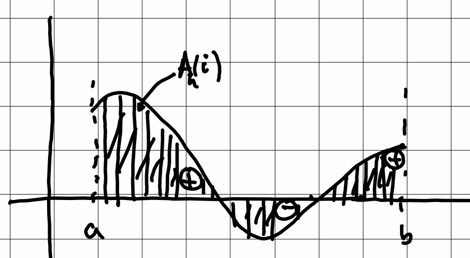
Recordeu que $\int_a^b f(x)dx$ és l'àrea (amb signe) de la regió delimitada per l'eix OX, el gràfic de $f(x)$ i $x=a$ i $x=b$.



Per calcular-la, els teoremes fonamentals del càlcul diuen que si $F(x)$ és una primitiva de $f(x)$, és a dir, $F'(x)=f(x)$, aleshores

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

Geomètricament $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} \sum_{i=0} h\cdot f(a+ih)$$
$$= \lim_{h\to 0} \sum_{i=1} h f(a+ih)$$
$$= \lim_{h\to 0} \sum A_h(i)$$



A les sumes $\sum \underbrace{f(x_i)\cdot h}_{A}$ per diferents valors de x_i se'n diuen sumes de Riemann. Com més fina és la partició ($h \to 0$) l'àrea dels rectangles és una millor aproximació de l'àrea.

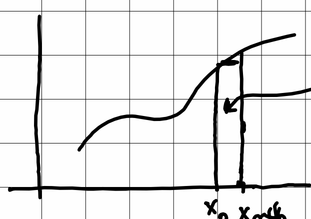
§0. NOVES FUNCIONS

El teorema fonamental ens permet definir funcions ja que si $f(x)$ és integrable en un interval $[a,b]$ aleshores

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$ és un funció tal

que $F'(x) = f(x)$, $x_0 \in (a,b)$

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \approx \lim_{h\to 0} \frac{A(x,h)}{h}$$
$$\approx f(x_0).$$

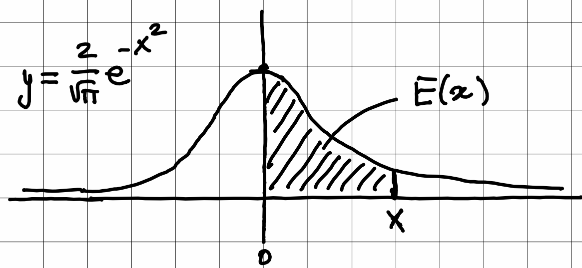


Per exemple, $I(x) = \int_0^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3} - \frac{0}{3} = \frac{x^3}{3}$. Podem veure que $I'(x) = 3x^2/3 = x^2$.

Ara veure no sempre les funcions de tipus $\int_0^x f(t)dt$ com a combinacions de funcions elementals.

Anem a veure una funció rara!

$$E(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

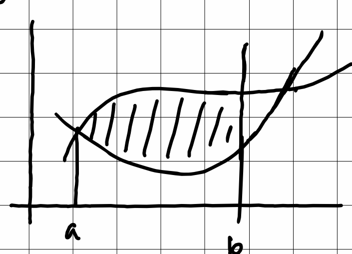


E(x) no es pot descriure en termes de funcions standards. Ara bé, la podem dibuixar!

$$E(0) = 0$$
$$E'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

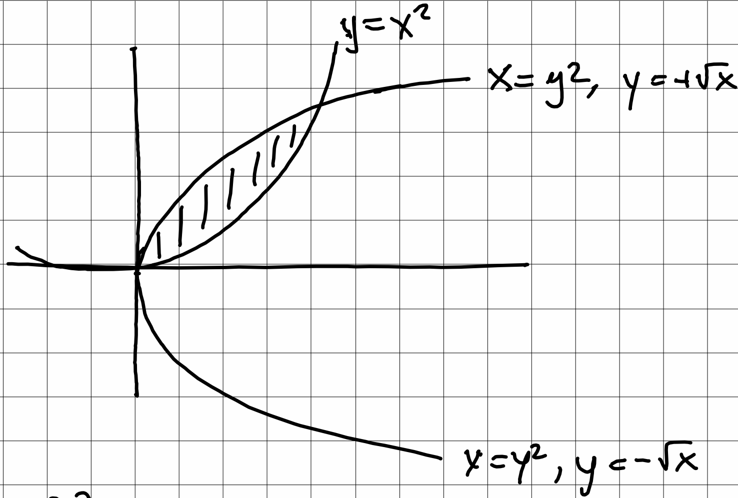
§1. L'àrea de la regió delimitada entre dos grafs

Siguin $f(x), g(x)$ dues funcions en un interval $[a,b]$, i $f(x) \leq g(x)$. Aleshores



$$A = \int_a^b g(x) - f(x)\,dx$$

Per exemple, calculem l'àrea entre $y^2 = x$ i $x = y^2$.



$$\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y^2=x \end{array}\right\} \qquad \sqrt{x}=x^2,$$

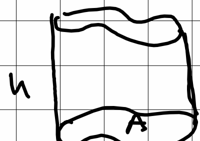
$$x=x^4, \quad x(x^3-1)=0, \quad x=0, \; x=1$$

$$\text{Àrea} = \int_0^1 \sqrt{x}-x^2\,dx = \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)-(0-0) = \frac{1}{3}$$

$$\int \sqrt{x}-x^2\,dx = \frac{x^{3/2}}{3/2}-\frac{x^3}{3}+C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^3}{3}+C$$

§2. El principi de Cavalieri i el volum de cossos sòlids.

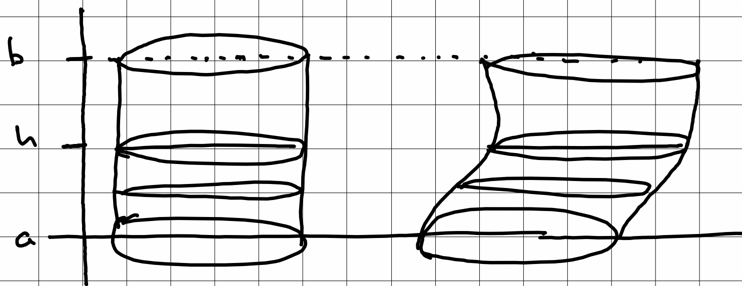
El principi de Cavalieri és un mètode que ens permet fer servir la integració per calcular volums de sòlids. Si pensem que en sòlids "regulars", volum és àrea per alçada

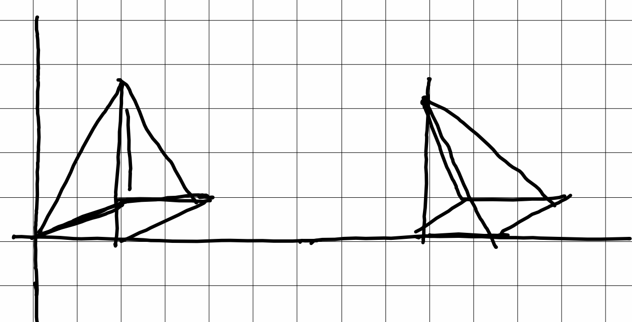


$$V = A\cdot h$$

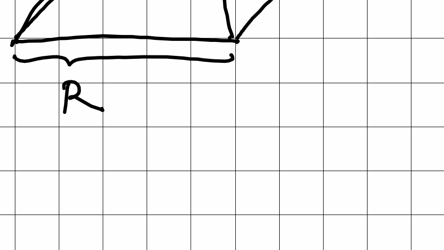
És normal pensar que podem fer quan no són regulars.

Cavalieri (1598-1647): si la intersecció de dos sòlids amb un pla horitzontal sempre dóna la mateixa àrea, sense importar l'alçada a que es troba el pla horitzontal, aleshores els dos sòlids tenen el mateix volum.

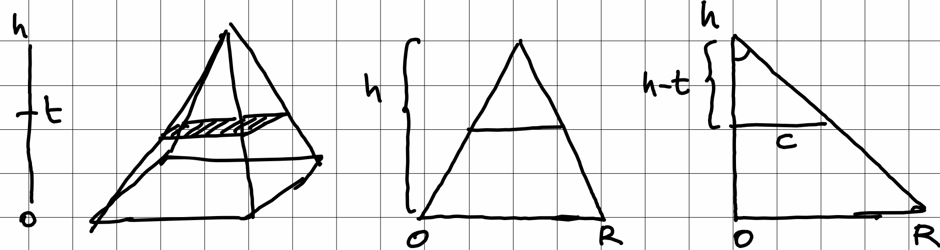




Anem a calcular el volum d'una piràmide de base cuadrada.



El que farem és calcular l'àrea de totes les seccions horitzontals que són quadrats



$$\frac{c}{h-t} = \frac{R}{h}$$

$$c = \frac{R}{h}(h-t).$$

Així a alçada t, la secció té àrea $A(t) = \frac{R^2}{h^2}(h-t)^2$.

Aleshores, el volum de la piràmide és la 'suma' de totes les àrees de les llesques $A(t)$!

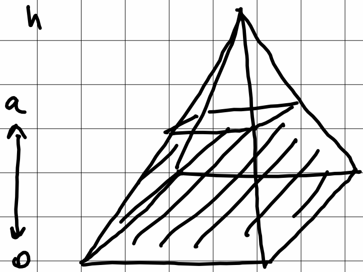
$$\text{Volum} = \int_0^h A(t)\,dt = \int_0^h \frac{R^2}{h^2}(h-t)^2\,dt =$$

$$= \frac{R^2}{h^2}\int_0^t (h-t)^2\,dt.$$

Fixeu-vos $\int (h-t)^2\,dt = -\int -(h-t)^2\,dt = -\frac{(h-t)^3}{3} + C$

Així $\text{Volum} = \frac{R^2}{h^2}\left(0 - \left(-\frac{h^3}{3}\right)\right) = \frac{R^2}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}R^2 h.$

Fixeu-vos que amb aquest mètode podem calcular el volum de la piràmide truncada.



$$\int_0^a \frac{R^2}{h^2}(h-t)^2\,dt =$$

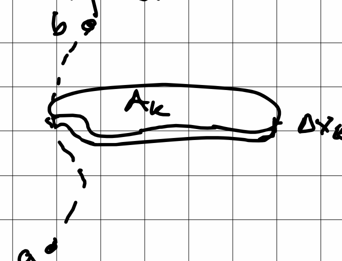
$$= \frac{R^2}{h^2}\left(-\frac{(h-a)^3}{3}+\frac{h^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{R^2}{h^2}\left(h^3-(h-a)^3\right).$$

El mètode general o estratègia consisteix en dividir el sòlid en llesques molt fines de les quals sabem calcular el volum i aleshores identificar la suma com una integral.

$$\text{Volum} = \sum A_k \cdot \Delta x_k$$

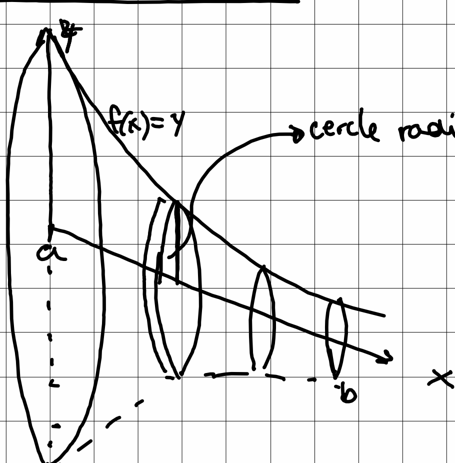
$$= \int_a^b A(x)\,dx$$



SÒLIDS DE REVOLUCIÓ

1

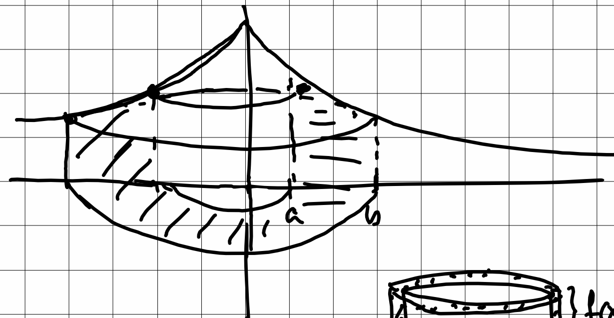
AL VOLTANT EIX X

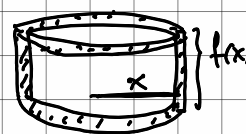


cercle radi $f(x)$ $\pi f(x)^2$

$$\text{Volum} = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$$

2 AL VOLTANT DE L'EIX Y



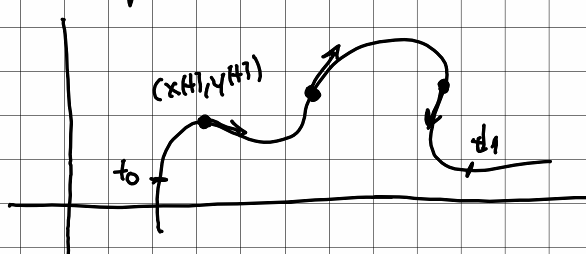


Si fem trossets petits de x,

$$\text{Volum} = \int_a^b 2\pi x\, f(x)\, dx$$

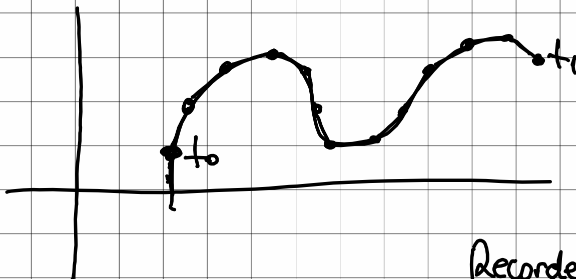
§3. Longitud d'un tros d'una corba

· Siguin $x(t)$, $y(t)$ dues funcions contínues que determinen els punts que dibuixa una corba. El vector tangent és $(x'(t), y'(t))$



Ens podem preguntar per la longitud de la corba entre dos instants t_0 i t_1.

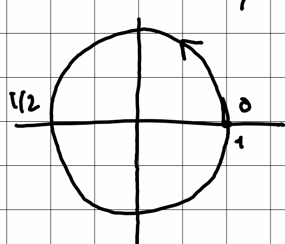
Intuitivament podem trencar la corba a trossets i canviar-los per rectes, en la direcció del vector tangent $v(t) = (x'(t), y'(t))$



Recordeu que la velocitat de la corba a t és el vector $v(t) = (x'(t), y'(t))$ amb mòdul $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

<u>Exemple 1</u> Si $x(t) = \cos(2\pi t)$, $y(t) = \sin(2\pi t)$ aleshores la corba que dibuixa és un cercle de radi 1.



$$L = \int_0^1 \sqrt{(-2\pi \sin(2\pi t))^2 + (2\pi \cos(2\pi t))^2}\, dt$$

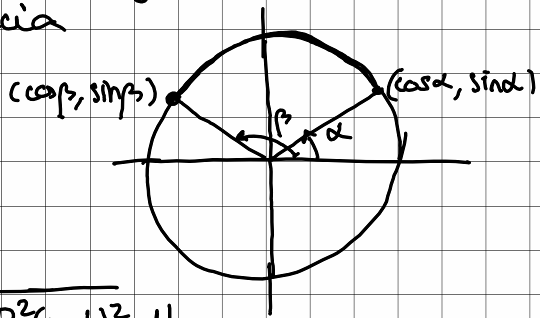
$$= \int_0^1 2\pi \sqrt{\sin^2 2\pi t + \cos^2 2\pi t}\, dt =$$

$$= \int_0^1 2\pi\, dt = 2\pi(1-0) = 2\pi$$

$$\int 1\, dt = t + C$$

Anem a calcular la longitud d'un tros d'arc d'una circumferència

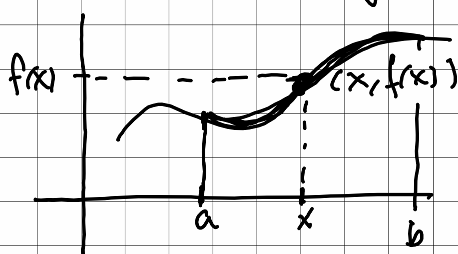
$$x(t) = R\cos t$$
$$y(t) = R\sin t$$



$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{R^2(-\sin t)^2 + R^2(\cos t)^2}\, dt =$$

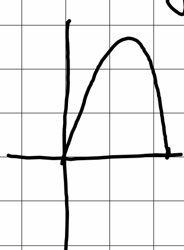
$$= \int_\alpha^\beta R\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = \int_\alpha^\beta R\, dt = R(\beta - \alpha)$$

<u>Exemple 2</u> : La longitud d'un tros d'un graf d'una funció



$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Imagineu que volem calcular la longitud de la corba $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$



$$L = \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx .$$

PERÒ ai.... aquesta <u>no</u> es pot expressar en termes de funcions elementals!

Podem fer una aproximació, $0 \leq \cos^2 x \leq 1$,

$$1 \leq \sqrt{1+\cos^2 x} \leq \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\int_0^{\pi} 1\,dx \leq \underset{\substack{\parallel \\ L}}{\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx} \leq \int_0^{\pi} \sqrt{2}\,dx$$

$$\pi \leq L \leq \sqrt{2}\pi .$$