CÀLCUL INTEGRAL:

ANEM A PINTAR REGIONS

"LES INTEGRALS SÓN SUMES"

Natàlia Castellana

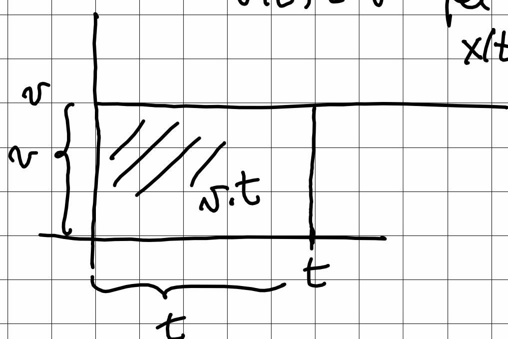
Tornem a parlar de curses. Hem vist com a partir de la posició del corredor podem obtenir la velocitat

$$v(t) = x'(t).$$

I si sabem la velocitat a cada instant, podem saber el que ha recorregut, on es troba?

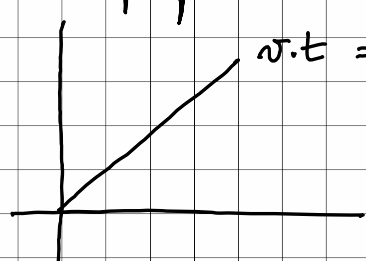
Comencem amb la situació més senzilla. El corredor va a velocitat constant,

$v(t) = v$ per tot t. Aleshores



$x(t) = v \cdot t$ (multipliquem el temps pels metres recorreguts per unitat de temps.)

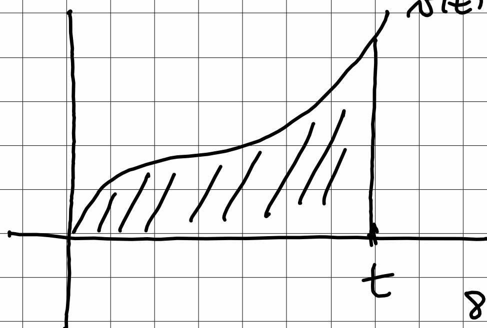
És a dir, multipliquem la velocitat pel temps.



$v \cdot t = x(t)$ recta de pendent v.

I si velocitat no és constant? I si varia el temps?

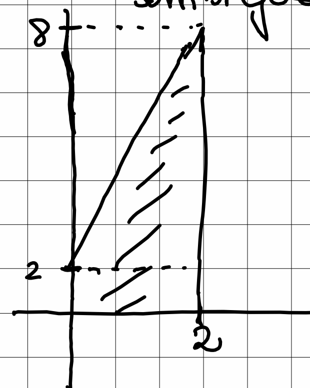
Què vol dir multiplicar ara multiplicar la velocitat pel temps quan la velocitat varia en el temps?



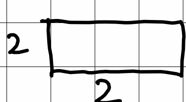
Quina és l'àrea de la regió sombrejada?

Exemples

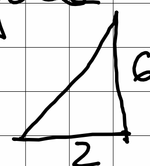
(1) $v(t) = 3t + 2$
entre 0 i 2.



Aleshores la regió sombrejada



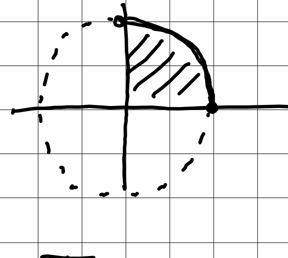
$= 4$



$\frac{6 \cdot 2}{2} = 6$

Per tant surt 10

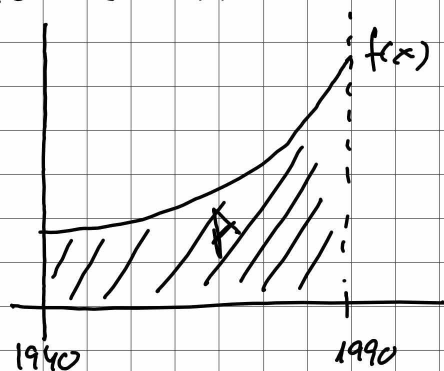
(2) $v(t) = \sqrt{4 - x^2}$
de 0 a 2.



$$\frac{1}{4}(\pi 2^2) = \frac{1}{4} 4\pi = \pi.$$

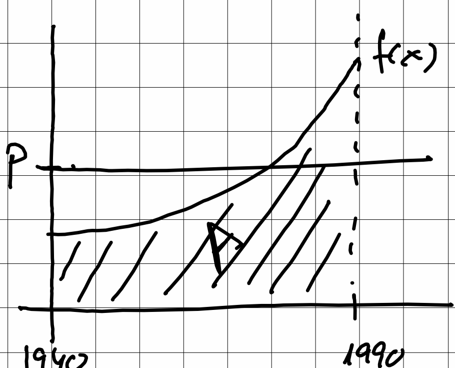
Anem a pensar un altre exemple. Tots sabem calcular la mitjana d'uns quants valors oi?

Però, si tenim una variable contínua, quin és el seu valor mitjà? Suposeu que $f(x)$ és la producció mundial de coure, de 1940 a 1990



A = àrea de la regió = "suma de tots els valors"

Quina ha estat la producció mitjana? Quin sentit té? Busquem una producció que si fes constant P cada any tindríem el mateix volum total oi?

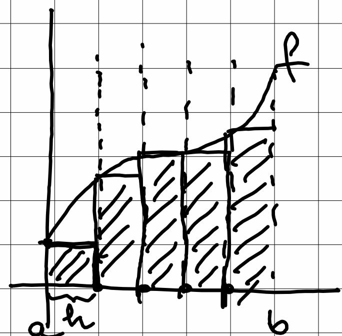


És a dir

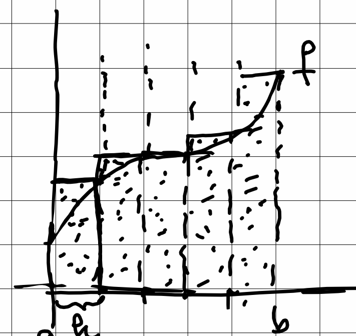
$$A = P\cdot(1990-1940)$$

$$P = \frac{A}{50}$$

Què podem fer en general? Doncs imaginem que la velocitat va sent constant en intervals petits i canvia de cop per fer aproximacions



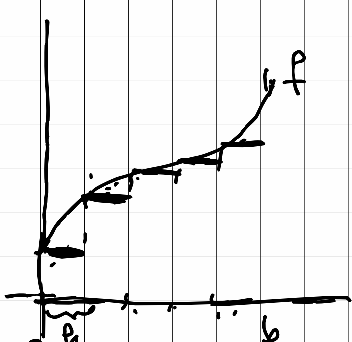
(prenem a cada interval el valor de l'extrem inferior de l'interval)

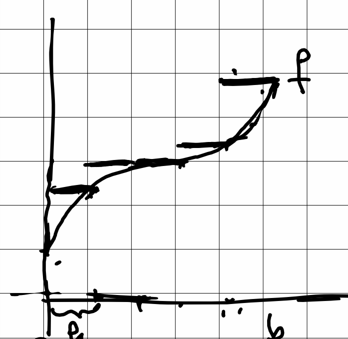


(prenem a cada interval el valor de l'extrem superior de l'interval)

$$S_{inf}(h) = \sum_{i=0} f(a+ih)\cdot h \qquad S_{sup}(h) = \sum_{i=1} f(a+ih)\cdot h$$

Com més petit sigui h, més s'assembla la funció escalonada a l'original f.



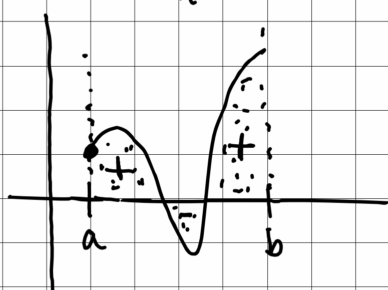


Si com fins els rectangles millor, perquè no fem $h=0$? No podem ... però **sí** podem fer

[límit de les àrees quan $h \to 0$]

DEFINICIÓ La integral definida d'una funció $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ és l'àrea (amb signe) de la regió definida per la gràfica de la funció, $x=a$, $x=b$ i $y=0$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h \to 0} S_{sup}(h) = \lim_{h \to 0} S_{inf}(h)$$



(si els dos límits coincideixen, f és integrable en $[a,b]$).

Ja hem vist exemples

$$\int_0^2 3\,dx = 3 \cdot 2 = 6 \qquad \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \pi$$

$$\int_0^3 3x+2\,dx = 9$$

No totes les funcions són integrable, per exemple,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ara, <u>sí</u> que ho són en $[a,b]$

- f acotada i contínua
- f creixent o decreixent.

<u>Exemple</u> $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Aleshores fem servir el conveni $\underset{a<b}{}$

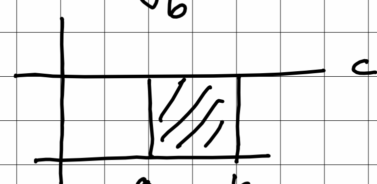
$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

a<b

<u>PROPIETATS</u>

① $a<b<c$ $$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

② $$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$



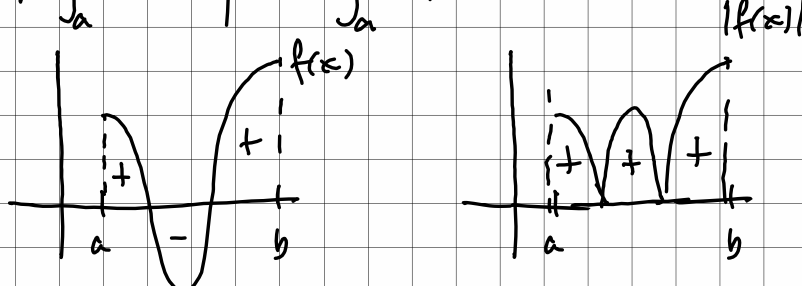
③ $f(x) \geq 0$ $x \in [a,b]$ $$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

④ $$\int_a^b a f(x) + b g(x)\, dx = a \int_a^b f(x)\,dx + b \int_a^b g(x)\, dx.$$

⑤ Si $f(x) \leq g(x)$ en $x \in [a,b]$ aleshores
$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

⑥ Si $m \leq f(x) \leq M$ en $x \in [a,b]$
aleshores
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

⑦ $$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

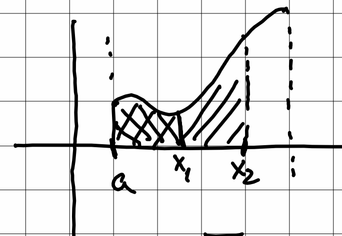


Però com ho fem? he de calcular límits cada cop que he de calcular una integral?

NO! Vegem dos resultats FONAMENTALS!

Sigui $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$. Ara definim la següent funció

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$



Fixeu-vos que $F(a)=0$. Tenim $F:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$. Com és? Puc mirar com és la gràfica de F? Com és la derivada F'?

PRIMER TEOREMA FONAMENTAL DEL CÀLCUL

Si $f:[a,b]\longrightarrow$ contínua, aleshores la funció $F:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, $F(x)=\int_a^x f(x)dx$ és derivable i

$$\boxed{F'(x)=f(x)\qquad x\in[a,b]}$$

Per exemple, és $f(x)=\sqrt[3]{\cos(x^2+x)}$ la derivada d'alguna altra funció?

SÍ, $f(x)=F'(x)$ on $F(x)=\int_0^x \sqrt[3]{\cos(t^2+t)}\,dt$.

Però, puc identificar $F(x)$ amb "funcions elementals" i construccions conegudes?

DEFINICIÓ: Sigui f una funció definida en un interval I. Diem que $F: I \to \mathbb{R}$ és una primitiva de f si per tot $x \in I$

$$F'(x) = f(x)$$

Exemple, $F(x) = x$ és una primitiva de $f(x) = 1$. però $F(x) = x+1$ també oi?

$$(x)' = (x+1)' = 1$$

Una funció no té una única primitiva, ara be, si $F_1(x)$ i $F_2(x)$ són dues primitives de $f(x)$, és a dir,

$$F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$$

alehores $F_1(x) - F_2(x) = C \in \mathbb{R}$, $F_1(x) = F_2(x) + C$.

NOTACIÓ les primitives de $f(x)$ les escriurem com $\int f(x)dx$,

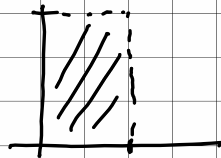
$$\int f(x) = F(x) + C \quad \text{si } F'(x) = f(x)$$
$$C \in \mathbb{R}.$$

SEGON TEOREMA FONAMENTAL DEL CÀLCUL (REGLA DE BARROW)

Sigui $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable, i F una primitiva de f,

$$\boxed{\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)}$$

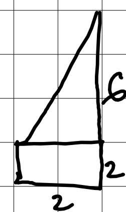
Recordem • $\int_0^2 3\,dx = 3\cdot 2 = 6$



Una primitiva de $f(x)=3$ és $F(x)=3x$ ja que $F'(x)=3$.

$$F(2)-F(0) = 3\cdot 2 - 3\cdot 0 = 6$$

• $\int_0^2 3x+2\,dx = 10$

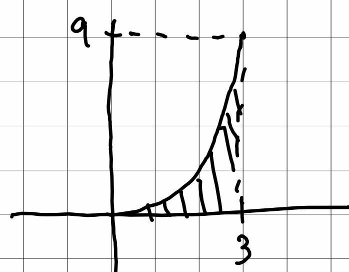


Una primitiva de $f(x)=3x+2$ és $F(x)=\frac{3}{2}x^2+2x$ ja que $F'(x)=3x+2$.

$$F(2)-F(0) = \left(\frac{3}{2}\cdot 2^2+2\cdot 2\right) - \left(\frac{3}{2}0^2+2\cdot 0\right) =$$

$$= 6+4 = 10.$$

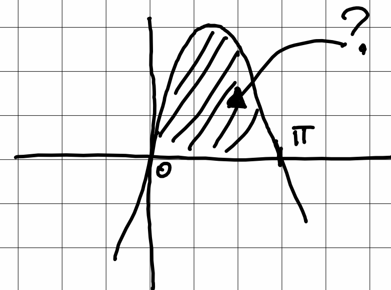
Si $f(x)=x^2$,



$\int_0^3 x^2\,dx = F(3)-F(0)$ on $F'(x)=x^2$.

Prenem $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, aleshores $F'(x) = x^2$

$$\int_0^2 x^2\,dx = \frac{1}{3}\cdot 2^2 - \frac{1}{8}0^2 = \frac{4}{3}.$$



Un altre exeple, $f(x) = \sin(x)$

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = ?$$

Una primitiva de $f(x) = \sin x$ és $F(x) = -\cos x$ ja que $F'(x) = -(-\sin x) = \sin x$. Aleshores

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \left(-\cos(\pi)\right) - \left(-\cos(0)\right) =$$
$$= -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2.$$

<u>CONCLUSIÓ</u>: HEM D'APRENDRE A CALCULAR PRIMITIVES