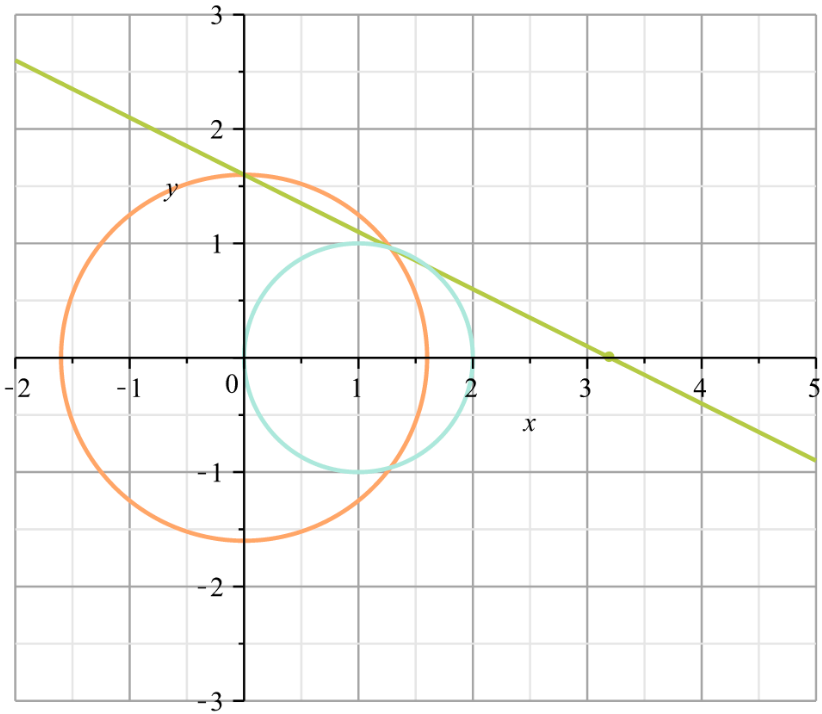
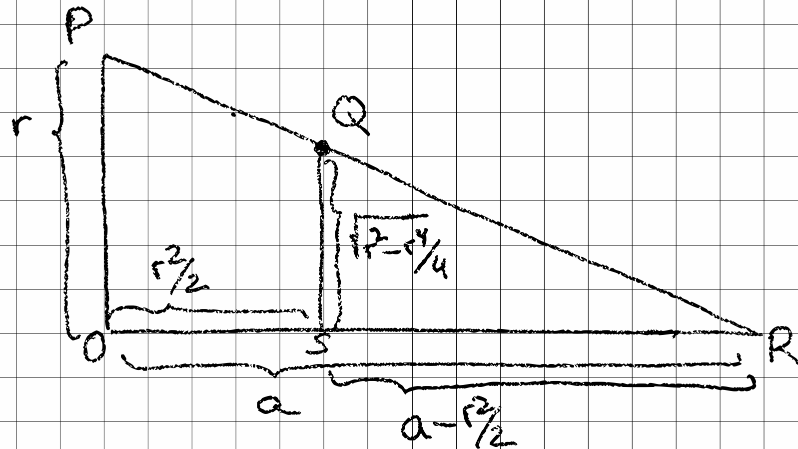
Un límit amb geometria.

Quin és el límit del punt d'intersecció de la recta verda amb l'eix horitzontal quan el radi del cercle taronja tendeix a zero?



3
2
1
-1
-2
-3
y
-2
-1
0
1
2
3
4
5
x



Q és el punt d'intersecció dels dos cercles

$$\left.\begin{array}{l}(x-1)^2+y^2=1\\ x^2+y^2=r^2\end{array}\right\} \quad \begin{array}{r}x^2-2x+1+y^2=1\\ -\quad x^2 +y^2=r^2\\ \hline -2x+1=1-r^2\\ x=r^2/2\end{array}$$

Aleshores $y=\sqrt{r^2-x^2}$

$$=\sqrt{r^2-\frac{r^4}{4}}$$

Els triangles RSQ i ROP són similars, aleshores

$$\frac{a-\frac{r^2}{2}}{\sqrt{r^2-\frac{r^4}{4}}}=\frac{a}{r}\ ;$$

$$r\left(a-\frac{r^2}{2}\right)=a\sqrt{r^2-\frac{r^4}{4}}\ ;\ ra-a\sqrt{r^2-\frac{r^4}{4}}=\frac{r^3}{2}$$

$$a=\frac{r^3/2}{r-\sqrt{r^2-r^4/4}}$$

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^3/2}{r-\sqrt{r^2-r^4/4}} = \quad \text{(simplifiquem l'expressió)}$$

$\frac{0}{0}$

$$= \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{2}\cdot\frac{r^3}{r-r\cdot\sqrt{1-r^2/4}} =$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{2}\,\frac{r^2}{1-\sqrt{1-r^2/4}} = \quad \text{(ara multipliquem i dividim per } 1+\sqrt{1-r^2/4}\text{)}$$

$\frac{0}{0}$

$$= \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{2}\cdot\frac{r^2}{1-(1-r^2/4)}\left(1+\sqrt{1-r^2/4}\right) =$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \frac{1}{2}\cdot\frac{r^2}{r^2/4}\cdot\left(1+\sqrt{1-r^2/4}\right) =$$

$$= \lim_{r\to 0^+} 2\cdot\left(1+\sqrt{1-r^2/4}\right) = 2\cdot 2 = 4.$$