Més aplicacions de la derivada

Natàlia Castellana

Per començar ... el que molts estàveu esperant

CÀLCUL DE LÍMITS AMB EL MÈTODE BERNOUILLI - HÔPITAL

<u>Teorema</u> (Bernouilli - Hôpital, 1696) Siguin $a, b \in \mathbb{R}$ (a, b poden ser $\pm\infty$), i $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ amb $g'(x) \neq 0$ per tot $x \in (a,b)$.

Suposem

$$\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = 0 \quad i \quad \lim_{x \to a^{\pm}} g(x) = 0$$

o bé

$$\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \to a^{\pm}} g(x) = \pm\infty$$

Si $\displaystyle\lim_{x \to a^{\pm}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (A pot ser $\pm\infty$),

alshores $\displaystyle\lim_{x \to a^{\pm}} \frac{f(x)}{g(x)} = A$

L'exemple que va donar Bernouilli és

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}} = \frac{16}{9}a$$

$$\lim_{x\to a} \frac{a\sqrt{ax} - x^2}{a - \sqrt{ax}} = 3a$$

Què passa amb $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{ax+1}}{\sqrt{x+1}}$ $a>0$

Abans anem a fer uns exemples senzillets.

① $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$

$\lim_{x\to 0} x = 0$

Aleshores com que $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$ tenim que
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (com ja sabíem).

② $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}$$

Per tant $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

(3) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \frac{\infty}{\infty}$ Si iterem

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}}, \dots$$

$$\dots \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n!} = \frac{1}{n!} \lim_{x\to\infty} e^x = +\infty$$

Per tant, $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

(4) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$, si derivem

$\lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = 0$ Per tant, $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Anem a fer d'Hôpital resolent el primer exemple on la va aplicar

$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}} = \frac{\sqrt{2a^4 - a^4} - a\sqrt[3]{a^3}}{a - \sqrt[4]{a^4}} = \frac{0}{0}$$

Ara calculem el límit del quocient de derivades

$$\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{2}(2a^3x-a^4)^{-1/2}\cdot(2a^3-4x^3)-a\frac{1}{3}(a^2x)^{-2/3}a^2}{-\sqrt[4]{a}\cdot\frac{3}{4}\cdot x^{-1/4}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(a^4)^{-1/2}\cdot(-2a^3)-\frac{a^3}{3}(a^3)^{-2/3}}{-a^{1/4}\cdot\frac{3}{4}a^{-1/4}} = \frac{\frac{1}{2}a^{-2}(-2a^3)-\frac{a^3}{3}a^{-2}}{-\frac{3}{4}a^{1/4}\cdot a^{-1/4}} =$$

$$= \frac{-a-\frac{a}{3}}{-\frac{3}{4}} = \frac{12a+4a}{9} = \frac{16}{9}a$$

A part de les indeterminacions $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, també es pot utilitzar en altres situacions que es poden transformar a les anteriors, per exemple $0\cdot\infty$.

$$0\cdot\infty = \frac{1}{\infty}\cdot\infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}, \text{ així}$$

si $\lim_{x\to a} f(x)=0$ aleshores $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\infty$.

<u>Exemple</u> $\lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0\cdot-\infty$, l'escrivim com un quocient $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$

i apliquem la regla de l'Hopital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} -x = 0$$

Per tant $\lim_{x\to 0} x \cdot \ln x = 0$.

En general, $\lim_{x\to 0} x^a \ln^b x = 0$ (iterant * vàries vegades la regla de l'Hôpital.

$$* \lim_{x\to 0} \frac{(\ln^b x)'}{\left(\frac{1}{x^a}\right)'} = \lim_{x\to 0} \frac{b \ln^{b-1} x \frac{1}{x}}{-a \frac{1}{x^{a+1}}} = b \ln^{b-1} x \cdot x^a$$

Un altre exemple prové d'estudiar $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ i indeterminacions del tipus 0^0

Per això el que fem és calcular el límit de logaritme de la funció i convertir-ho en un producte

Si $L = \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$, $\ln L = \lim_{x\to a} \ln\left(f(x)^{g(x)}\right)$

$$= \lim_{x\to a} g(x) \cdot \ln(f(x))$$

Anem a fer un exemple,

$$\lim_{x\to 0} x^x = 0^0 \ ?$$

Sigui $L = \lim_{x\to 0} x^x$, aleshores

$$\ln L = \lim_{x\to 0} \ln(x^x) = \lim_{x\to 0} x\ln x = 0$$

Hôpital (exemple anterior)

$\ln L = 0$, $L = e^0 = 1$.

Per tant $\lim_{x\to 0} x^x = 1$.

ÉS MOLT IMPORTANT USAR LA REGLA DE BERNOULLI-HÔPITAL <u>NOMÉS</u> QUAN ES COMPLEIXEN LES CONDICIONS.

Fixeu-vos $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{x+\cos x} = \dfrac{0}{0+1} = \dfrac{0}{1} = 0$

PERÒ

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\sin x} = \frac{1}{1-0} = 1$$

<u>Exemple</u> Sigui $f(x) = \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}$,

veiem que si x és un múltiple de 2π aleshores $f(x)$ no està definida. Quin valor hauríem de donar-li per a que sigui contínua?

$$\lim_{x\to 2\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot 2\pi\right)}{\sin(\pi)} =$$

$$= \frac{\sin((2n+1)\pi)}{\sin(\pi)} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2\pi} \frac{\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot\frac{1}{2}} = \lim_{x\to 2\pi} \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\cos((2n+1)\pi)(n+1/2)}{-1/2} = \frac{-(n+1/2)}{-1/2} = 2\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2n+1.$$

Ara que el sabem fer servir, anem a veure perquè funciona el teorema de l'Hôpital (Bernouilli)

Ens calen dos resultats de la derivada,

TEOREMA DE ROLLE Sigui $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua i derivable a $x \in (a,b)$. Si $f(a) = f(b)$ alshoes existeix $t \in (a,b)$ amb $f'(t) = 0$.

Però en realitat volem un resultat més general

TEOREMA DEL VALOR MIG (Cauchy)

Sigui $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua amb derivada a $\forall t \in (a,b)$. Alshores existeix $c \in (a,b)$ amb

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

"En algun punt la velocitat instàntanea coincideix amb la mitjana a l'interval $[a,b]$"

No és difícil de veure, mirem la diferència entre la funció i la recta que va de $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$

$$h(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \right]$$

$$h(a) = 0 \qquad h(b) = 0$$

Per tant en algun punt $c \in (a,b)$, $h'(x) = 0$.

Ara bé, $h'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$h'(c) = 0$ vol dir, $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Anem a justificar el teorema de Bernouilli-l'Hôpital.

Fem un cas particular primer:

- suposem $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ on $f(0) = g(0) = 0$
$g'(x) \neq 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\frac{g(x)-g(0)}{x-0}} =$$

$$= \frac{f'(0)}{g'(0)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Anem a fer el cas $x \to 0^+$ i suposem que $f(x), g(x)$ definides a $(0, b]$ on $b > 0$.

Suposem $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} g(x) = 0$, aleshores podem definir $f(0) = g(0) = 0$.

Considerem $H(x) = f(x)g(b) - g(x)f(b)$, aleshores

$$H(0) = f(0)g(b) - g(0)f(b) = 0$$
$$H(b) = f(b)g(b) - f(b)g(b) = 0$$

Aleshores pel teorema de Rolle, hi ha $c \in (0,b)$ amb

$$H'(c) = 0.$$

Qui és $H'(x)$? $f'(x)g(b) - g'(x)f(b)$

$$0 = f'(c)g(b) - g'(c)f(b),$$

és a dir $\dfrac{f(b)}{g(b)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

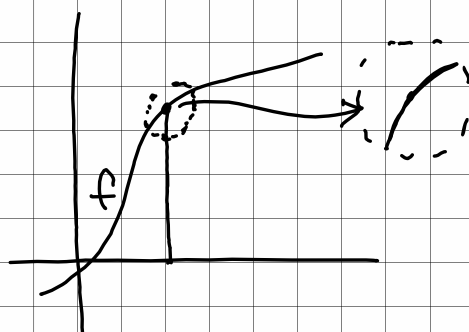
Ara si $b \to 0$ aleshores $c \to 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{b\to 0^+} \frac{f(b)}{g(b)} = \lim_{c \to 0} \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

#

LA FÒRMULA DE TAYLOR O

SI EN LLOC DE BUSCAR LA MILLOR APROXIMACIÓ LINEAL, FEM APROXIMACIONS POLIONOMIALS ?



Si fes un polinomi de grau n, quin polinomi seria?

Recordeu que $f'(a)$ és la pendent de la recta tangent en $x=a$ i aleshores la millor aproximació lineal és la recta tangent

$$L(x) = f(a) + f'(x)(x-a)$$

Així, al voltant de $x=a$ podem pensar

$$f(x) = f(a) + f'(x)(x-a) + \text{Error}(x,a)$$

tal que

$$\text{Error}(x,a) \longrightarrow 0 \quad \text{quan } x \to a.$$

<u>Exemple</u> $f(x) = \sqrt{1+x}$, $a=0$ aleshores

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ així $f(0{,}1) \approx 1 + \frac{1}{2} 0{,}1 = 1{,}05$

$f'(0) = 1/2$

$$\sqrt{1{,}1}$$

La fórmula de Taylor generalitza al cas de polinomis de grau n on ens dóna la millor aproximació a $f(x)$ en $x=a$ mitjançant un polinomi de grau n.
A més, podem acotar l'error comès.

<u>TEOREMA</u> (fórmula de Taylor amb el residu de Lagrange)

Sigui I un interval, $n \in \mathbb{N}$ i $f: I \to \mathbb{R}$ una funció que té derivades $f', f'', \dots, f^{(n+1)}$.
Si $a \in I$, $x \in I$

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{\text{polinomi de Taylor de grau } n \quad P_n(x,a)} + R_n(x,a)$$

i $R_n(x,a)$ és l'error d'aproximació que es pot expressar per

$$R_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

on c és un punt desconegut entre x i a.

- Estimar l'error comès serà donar una cota de $R_n(x,a)$

- En el cas de polinomis arribem a una aproximació exacta per n = grau del polinomi.

Exemple :

(1) $f(x) = 1 + x - x^2 + 3x^3$, $a = 2$

$$f(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3$$
$$= 23 + 33(x-2) + 17(x-2)^2 + 3(x-2)^3$$

on $23 = f(2)$

$33 = f'(2)$ $\qquad f'(x) = 1 - 2x + 9x^2$

$17 = \frac{f''(2)}{2}$ $\qquad f''(x) = -2 + 18x$

$\qquad f'''(x) = 18$

$3 = \frac{f'''(2)}{6}$

(2) $f(x) = e^x$, $a = 0$ Aleshores $f^{(n)}(x) = e^x$ per qualsevol $n \in \mathbb{N}$, i $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

Per tant

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + e^c \frac{x^{n+1}}{n+1!}$$

on $c \in (0, x)$. Prenem $x = 1$

Fixeu-vos que si $0 < c < 1$ aleshores $e^c < e^1 < 3$.

Així l'error $R_n(1,0) < \frac{3}{n+1!}$

Per exemple, la diferència entre $f(1) = e$ i $P_n(1,0)$

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) \right| = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

Per exemple, si volem calcular el número e amb el polinomi fins a grau 10, tenim

$(n+1)! = 11! = 39916800$ i al fer $\frac{1}{n+1!}$ quedarà un error $< 10^{-7}$.

Per quin n obtindrem un error $< 10^{-10}$? Aleshores cal

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-10}$$

(3) $f(x) = \sin(x)$, $a = 0$

$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos x \qquad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$

$f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin x \qquad f^{(2n)}(0) = 0$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{\sin^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

i l'error es podrà acotar per $\frac{1}{(2n+2)!} |x|^{2n+2}$.

(4) $f(x) = \cos x$, $a = 0$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \frac{\cos^{2n+1}(c)}{(2n+1)!} x^{2n+2}$$

i l'error es podrà acotar per $\frac{1}{2n+1!} |x^{2n+2}|$.

Recordem $\sin x \sim x$

$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$ quan $x \to 0$

5 $f(x) = \ln(1+x)$ prenent $a=0$, fins ordre n

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \varepsilon_n$$

$$\varepsilon_n < \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ per } x>0.$$

<u>Exercici</u> Calculem $\ln(2)$ amb un error $< 10^{-10}$.

Recordem que $\varepsilon_n < \frac{x^{n+1}}{n+1}$, en aquest cas volem calcular $f(1)$ on $f(x) = \ln(1+x)$.

$$\varepsilon_n < \frac{1}{n+1} < 10^{-10}, \quad n > 10^{10}-1 \text{ !!!}$$

Per acabar, la fórmula de Taylor ens permet fer una descripció més acurada de la naturalesa dels punts on les derivades s'anul·len.

TEOREMA Si f és una funció n vegades derivable, suposem que existeix $a \in \mathbb{R}$

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$$

i $f^{(n)}(a) \neq 0$.

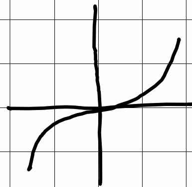
Si n és parell, aleshores

- Si $f^{(n)}(a) > 0$ tenim mínim relatiu
- Si $f^{(n)}(a) < 0$ tenim màxim relatiu.

Si n és senar, aleshores és un punt d'inflexió

(1) $f(x) = x^3$

$x = 0$

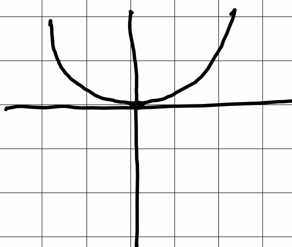


$f'(x) = 3x^2$
$f''(x) = 6x$

$f'''(x) = 6 \neq 0$

(2) $f(x) = x^4$

$x = 0$



$f'(x) = 4x^3$
$f''(x) = 12x^2$
$f'''(x) = 24x$
$f^{IV}(x) = 24 > 0$

MÍNIM RELATIU.