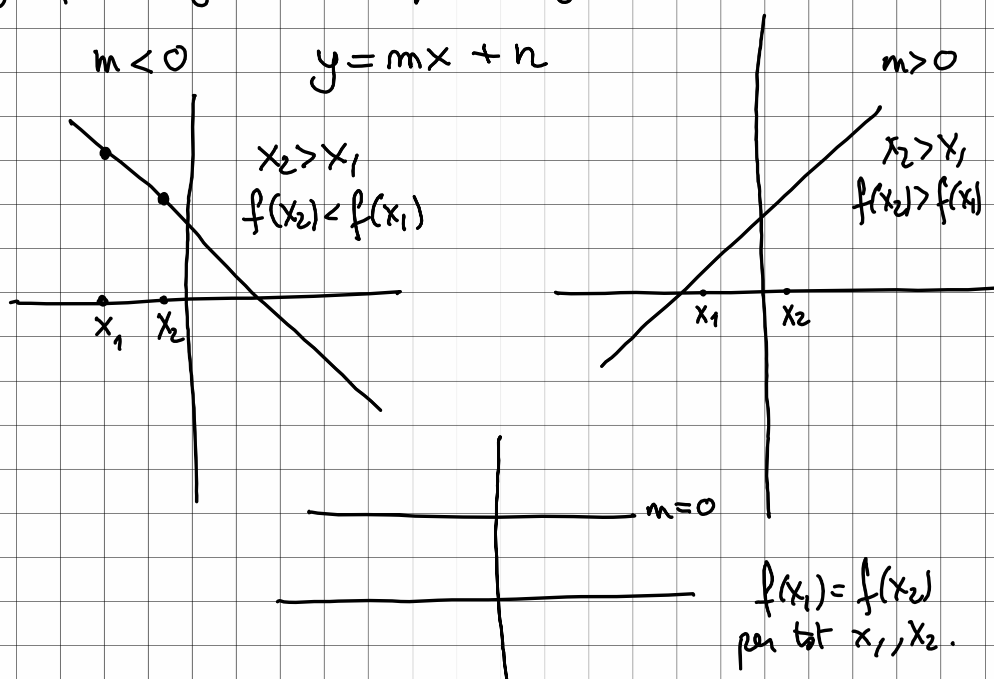
Conèixer com varia la funció en un punt, $f'(x)$, ens dóna molta informació de tipus qualitatiu que ens permet conèixer com es comporta la funció.

Per exemple, si $f'(x_0) > 0$ sabem que la recta tangent té pendent positiva, per tant, la variable $y = f(x)$ augmentarà quan augmenti x.

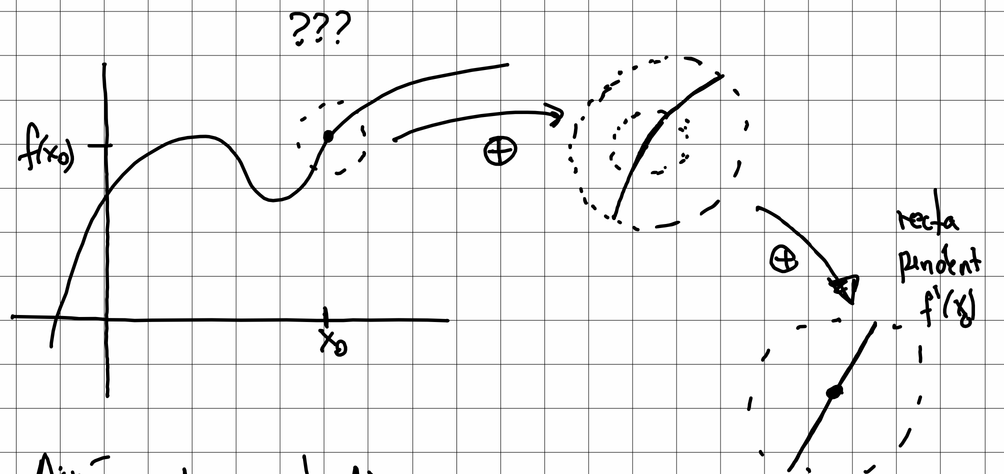


<u>Definició</u> Si I és un interval, $f: I \to \mathbb{R}$,
$x_1, x_2 \in I$ amb $x_1 < x_2$

1) f és creixent si $f(x_1) \le f(x_2)$

2) f és decreixent si $f(x_1) \ge f(x_2)$

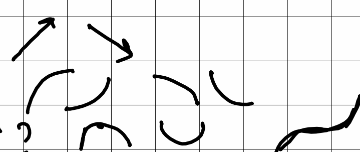
LA DERIVADA ÉS UN MICROSCOPI QUE FA ZOOM I NOMÉS VEU RECTES



$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

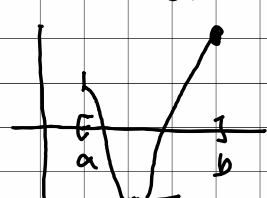
Així podem estudiar el comportament d'un funció en un punt:

- creix o decreix?
- 'accelera' o 'frena'?
- 'muntanya' o 'vall'?



COMENCEM: primer recordeu que una funció contínua en $[a,b]$ té màxims i mínims. On són?

Què tenen d'especial aquests punts? Amb la derivada els podem localitzar (a vegades)



Definició (creixement i decreixement d'una funció)

Sigui I un interval, $f: I \to \mathbb{R}$, si per tot $x_1 < x_2 \in I$

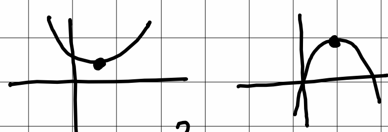
(1) $f(x_1) \leq f(x_2)$, f creixent en I

(2) $f(x_1) \geq f(x_2)$, f decreixent en I

(diem que és estrictament creixent o decreixent si no es dóna la desigualtat)

Direm que $c \in I$ és un màxim (resp. mínim) relatiu o local si existeix un $\varepsilon > 0$ tal que $f(c)$ és màxim (resp mín) en $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, ($f(c) \geq f(x)$ $x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ ó $f(c) \leq f(x)$ $x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$).

Per exemple,



$(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$ $\quad$ $-(x-1)^2+1$

Veurem tot seguit com les derivades ens donen informació sobre aquestes característiques d'una funció.

Primer veurem com fer una primera 'redada' buscant extrems :-).

Teorema (de Fermat) Sigui $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ i suposem que $c \in \mathbb{R}$ tal que

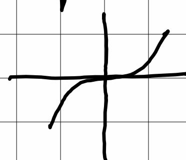
(1) $c \in (a,b)$

(2) f és derivable en c (existeix $\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$)

(3) c és un extrem relatiu de f

aleshores $f'(c) = 0$.

Ara bé, recordeu que si $f'(c)=0$ podria passar encara que no fos extrem. Per exemple



$f(x) = x^3$ en $x=0$

Així, si f és contínua en $[a,b]$, sabem que sempre té màxims i mínims absoluts

$\{x_0 \mid x_0$ màxim/mínim absolut de f en $[a,b]\}$

$$\subseteq$$

$\{x \in [a,b] \mid f'(x) = 0\} \cup \{x \in [a,b] \mid f$ no derivable$\} \cup \{a,b\}$

Anem a veure uns exemples

① $f(x) = x^2 - 2x \quad x \in [0,4]$, és derivable en tot $x \in [0,4]$

$f'(x) = 2x - 2 \qquad f'(x) = 0, \quad 2x - 2 = 0, \quad x = 1$

$1 \in [0,4]$

Aleshores,

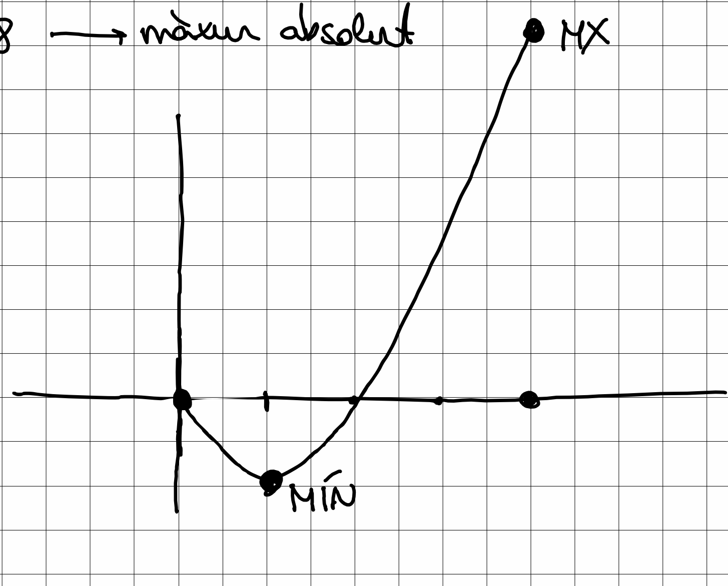
$\{\text{punts on } f'(x) = 0\} = \{1\}$

$\{\text{punts on } f \text{ no és derivable}\} = \emptyset$

$\{\text{extrems}\} = \{0, 4\}$.

Ara d'entre aquests mirem els extrems absoluts amb una taula de valors.

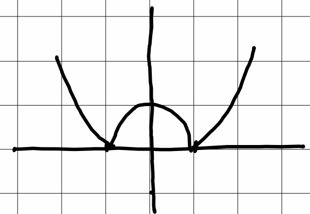
x	$f(x)$	
0	0.	
1	-1	$\longrightarrow$ mínim relatiu / absolut
4	8	$\longrightarrow$ màxim absolut



② $g(x) = |x^2-1| \qquad x \in [-2,2]$

g és contínua, però no derivable quan $x = \pm 1$.

$$g(x) = \begin{cases} x^2-1 & x \in [-2,-1] \\ -x^2+1 & x \in [-1,1] \\ x^2-1 & x \in [1,2] \end{cases}$$



$$g'(x) = \begin{cases} 2x & x \in [-2,-1) \\ -2x & x \in (-1,1) \\ 2x & x \in (1,2] \end{cases}$$

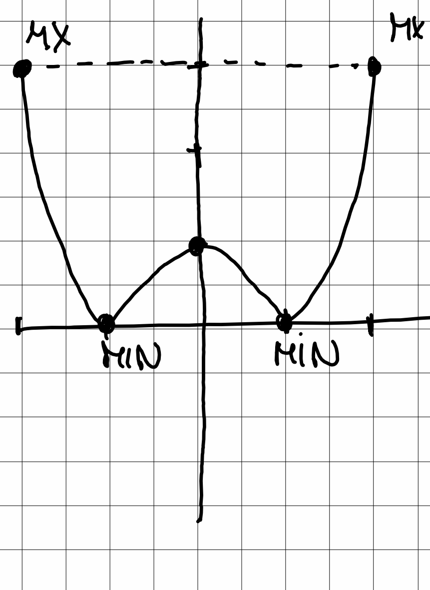
$g'(x) = 0$ sii $x = 0$.

$\{x \in [-2,2] \mid g'(x) = 0\} = \{0\}$

$\{x \in [-2,2] \mid g \text{ no derivable}\} = \{-1, 1\}$

$\{\text{extrems interval}\} = \{-2, 2\}$

x	$g(x)$
-2	$3 \to$ MÀX
-1	$0 \to$ MÍN
0	$1 \to$ (màx relatiu)
1	$0 \to$ MÍN
2	$3 \to$ MÀX



③ $h(x) = x^3 + x \quad x \in [0,2]$

(contínua i derivable a $[0,2]$)

$h'(x) = 3x^2 + 1$

$h'(x) = 0 \quad 3x^2 + 1 = 0$ no té solució!

$\{x \in [0,2] \mid h'(x) = 0\} = \emptyset$
$\{x \in [0,2] \mid h \text{ no derivable}\} = \emptyset$
$\{\text{extrems}\} = \{0, 2\}$

x	f(x)	
0	0	→ MÍN
2	10	→ MÀX.

I SOBRE EL CREIXEMENT i DECREIXEMENT?

CRITERI I interval obert, $f: I \to \mathbb{R}$ derivable

1. f constant si i només si $f'(x) = 0$ per tot $x \in I$
2. f creixent si i només si $f'(x) \geq 0$ per tot $x \in I$
3. f decreixent si i només si $f'(x) \leq 0$ per tot $x \in I$
4. si $f'(x) > 0$ per tot $x \in I$ aleshores f és estrictament creixent.
5. si $f'(x) < 0$ per tot $x \in I$ aleshores f és estrictament decreixent.

Així, per estudiar el creixement/decreixement d'una funció haurem de resoldre inequacions.

Exemple $f(x) = \dfrac{x}{1+x^4}$ té domini $\mathbb{R}$ ja que $1+x^4 \neq 0$ sempre

i a més és derivable a tot arreu.

$$f'(x) = \frac{1+x^4 - x\cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} = \frac{1-3x^4}{(1+x^4)^2}$$

Quan és creixent? $1-3x^4>0$ sii $x^4 < \frac{1}{3}$

$|x| < \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$

- Per tant, és creixent a $\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$
- Serà decreixent a $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, +\infty\right)$
- Per tant $-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ és un mínim relatiu i $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ és un màxim relatiu.

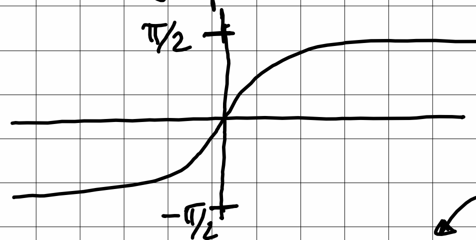
	$(-\infty, -1/\sqrt[4]{3})$	$-1/\sqrt[4]{3}$	$(-1/\sqrt[4]{3}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}})$	$1/\sqrt[4]{3}$	$(1/\sqrt[4]{3}, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	MÍN	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

Anem a veure un parell d'exemples interessants.

Exemple

$$g(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \quad x>0$$

Recordeu que la gràfica arctan és



$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right) =$$

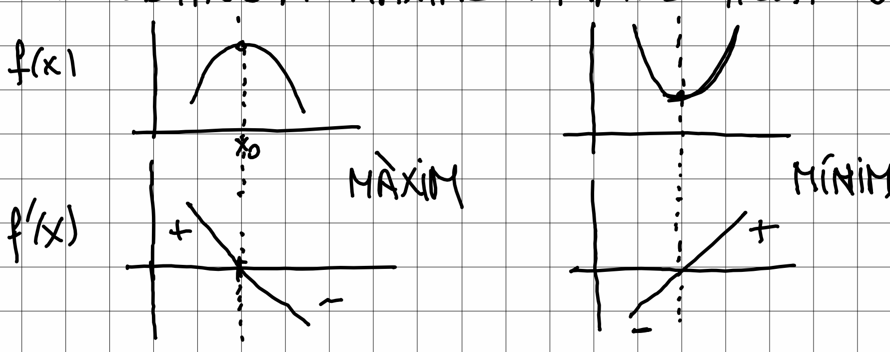
$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{x^2}{x^2+1}\cdot\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

Per tant $g(x)$ és constant! $g(1) = \frac{\pi}{4} + \arctan\left(\frac{4}{\pi}\right)$

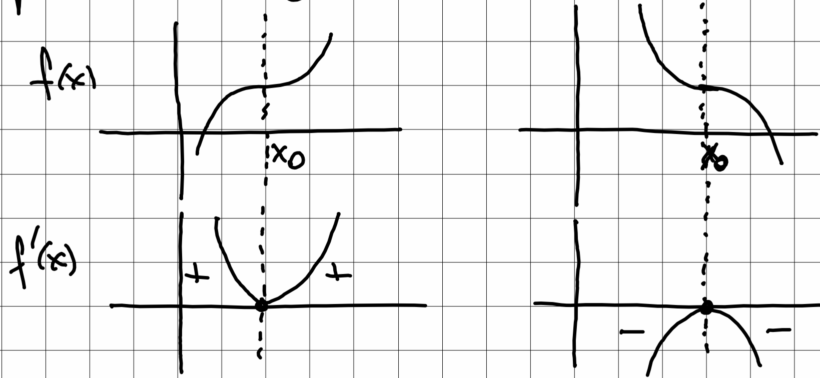
$$g(x) = \pi/4 + \arctan\left(\frac{4}{\pi}\right) \text{ si } x>0 .$$

Feu el mateix amb $h(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$.
Fixeu-vos que $h'(x) = 2\sin x \cos x + 2\cos x(-\sin x)$
$= 0.$

COM DISTINGIM MÀXIMS I MÍNIMS RELATIUS?

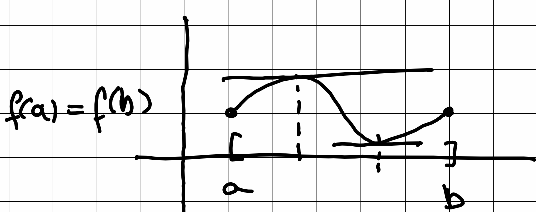


També podem tenir situacions amb $f'(x_0)=0$ i que no són extrems.



Anem tot seguit a veure dos resultats teòrics molt rellevants.

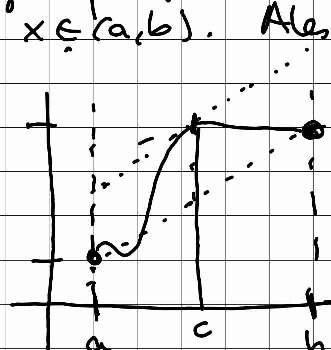
TEOREMA DE ROLLE: Sigui $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua i derivable a tot $x\in(a,b)$. Si $f(a)=f(b)$ aleshores existeix $c\in(a,b)$ amb $f'(c)=0$.



TEOREMA DEL VALOR MIG: Sigui $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua i derivable a tot $x\in(a,b)$. Aleshores existeix $c\in(a,b)$ amb

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

pendent recta que va de $(a,f(a))$ a $(b,f(b))$



Anem a veure alguna aplicació

PREGUNTA Quantes solucions té $x^3-3x+1=0$?

Farem un esbós ràpid! Primer sabem que com a mínim en té una ja que és de grau senar,

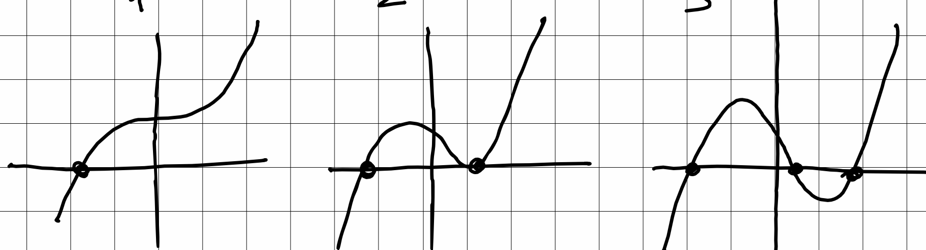
$$\lim_{x\to-\infty} x^3-3x+1=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3-3x+1=+\infty$$

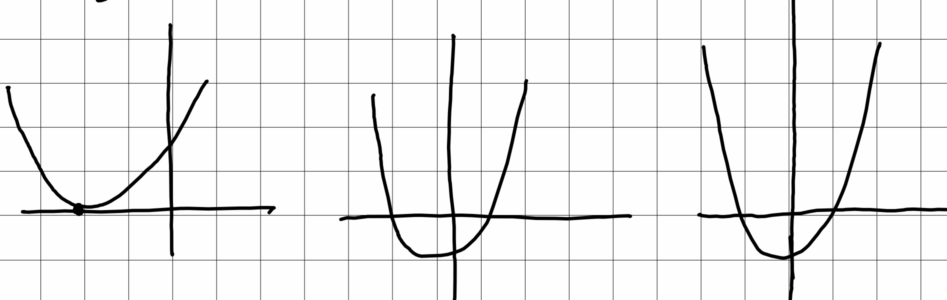
i contínua a tot el domini $\mathbb{R}$

i com a molt en tindrà 3 ja que és de grau 3. Ara bé podria tenir

1 2 3



Com seria la derivada?



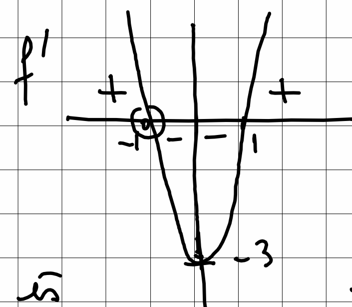
(fixa't que 2 i 3 són iguals però traslladant verticalment)

$f(x) = x^3 - 3x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1)$

$f'(x) = 0$ si i només si $x = 1$, $x = -1$

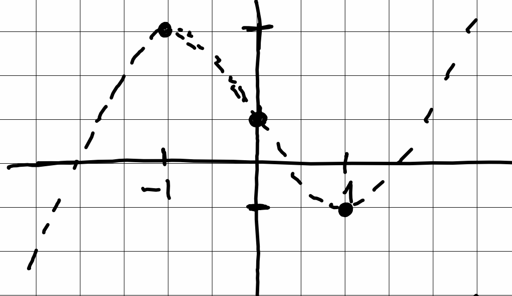
De fet



Per tant -1 és màxim i $+1$ és mínim

f'	$+$		$-$		$+$
f	$\nearrow$	-1	$\searrow$	1	$\nearrow$
		MX		MÍN	

$f(-1) = 3$ $\quad f(1) = -1$



Així $\underbrace{f(-2)<0 \quad f(0)=1>0}$ $\underbrace{\quad f(1)<0}$ $\underbrace{\quad f(5)>0}$

Tenim, per Bolzano, tres solucions reals de l'equació

$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

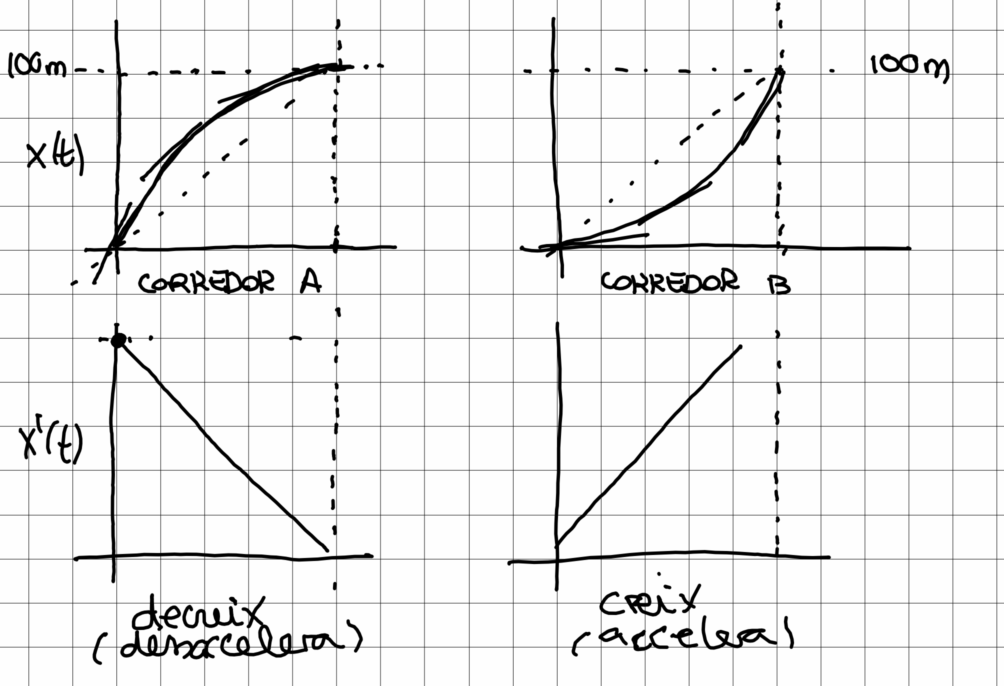
Hem vist que si conec la gràfica de f', aleshores ja obtinc molta informació de f. Però si repetim la idea, per conèixer la gràfica de f', haurié de derivar-la

$$(f')' = f''.$$

Quina informació de f ens dóna la derivada de la derivada? En diem derivada segona.

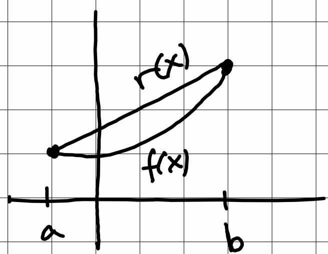
<u>Definició</u> Si f és una funció, $f^{(n)}$ és la n-essima derivada, és a dir, la funció que obtenim iterant la derivada n-vegades.

En analogia amb la física, la segona derivada correspon a l'acceleració: com creix/decreix la velocitat



El signe + o − de la segona derivada determina si la primera creix o decreix (accelera o desaccelera)

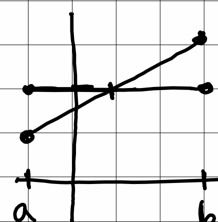
A matemàtiques parlem de concavitat i convexitat



Si la recta secant va per sobre, diem que f és convexa en [a,b]

$$f((1-x)a + xb) \leq (1-x)f(a) + x f(b)$$

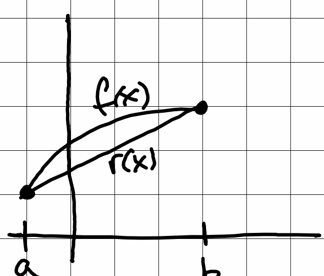
Si mirem les derivades



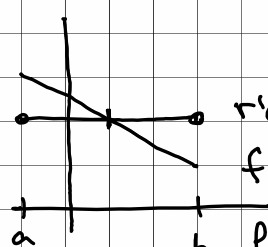
$r'(x) = cte$

$f'(x)$ creix

$f''(x) > 0$



La recta secant va per sota



$r'(x) = cte$

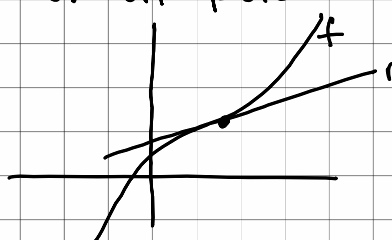
$f'(x)$ decreix

$f''(x) < 0$

CRITERI: I interval obert
$f: I \to \mathbb{R}$ contínua i derivable

f convexa a $I \iff f''(x) \geq 0$ per tot $x \in I$ $\cup$
f còncava a $I \iff f''(x) \leq 0$ per tot $x \in I$ $\cap$

Si la recta tangent "travessa" la gràfica alehores hi ha un canvi de convexitat/concavitat i diem que és un punt d'inflexió



Si x_0 és un punt d'inflexió $f''(x_0) = 0$

però $f''(x_0) = 0$ NO vol dir que sigui punt d'inflexió (e.g. $f(x) = x^4$).

Tota aquesta informació la recollirem de manera sistemàtica per a fer representacions gràfiques (aproximades) de funcions.

El que farem és buscar els punts rellevants i importants que necessitem en una taula de valors
- domini
- asímptotes
- màxims, mínims relatius
- punts inflexió
- ...

REPRESENTACIÓ GRÀFICA

(1) Domini / simetria / talls amb els eixos

(2) Assímptotes (verticals / horitzontals / obliques)
és a dir, límits laterals.

(3) Creixement / decreixement

$\{x \mid f'(x) > 0\}$, $\{x \mid f'(x) < 0\}$, $\{x \mid f'(x) = 0\}$

(4) Extrems relatius

(5) Convexitat / concavitat

$\{x \mid f''(x) > 0\}$, $\{x \mid f''(x) < 0\}$, $\{x \mid f''(x) = 0\}$

(6) Punts d'inflexió

(7) Dibuix / esbós de la gràfica de f.

Anem a fer un exemple pas a pas:

EXEMPLE $\quad f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

(1) Domini $= \mathbb{R} \setminus \{x \mid (x-1)^2 = 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
$= (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

No s'observa cap simetria $\quad f(-x) \neq -f(x)$
$f(0) = 0$, $\quad f(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \qquad \neq f(x)$

(2) Assíptotes

$$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f \qquad \lim_{x\to1^-} f \qquad \lim_{x\to1^+} f \qquad \lim_{x\to+\infty} f$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1-2/x+1/x^2} = 0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{(x-1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1/x}{1-2/x+1/x^2} = 0^- \quad \left(1/-\infty = 0^-\right)$$

$$\boxed{\text{Assímptota horitzontal } y=0}$$

$$\lim_{x\to1^-} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\boxed{\text{Assíptota vertical } x=1}$$

(3) Creixement / decreixement

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2 - x\cdot2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)\cdot[(x-1)-2x]}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{-x-1}{(x-1)^3}$$

$$f'(x) = -\frac{x+1}{(x-1)^3}$$

$f'(x) = 0$ sii $x+1=0$, $x=-1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

creix $(-1,1)$
decreix $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

(4) Extrems relatius $x=-1$ és un mínim relatiu

(5) Concavitat / convexitat

$$f''(x) = -\frac{(x-1)^3 - (x+1)\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} =$$

$$= -\frac{(x-1)^2\left[(x-1)-(x+1)\cdot 3\right]}{(x-1)^6} = -\frac{-2x-4}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2x+4}{(x-1)^4}$$

$f''(x) = 0$ sii $2x+4=0$
$x=-2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$+$		$+$	
$f(x)$		$\cap$		$\cup$		$\cup$	

còncava $(-\infty,-2)$
convexa $(-2,1) \cup (1,+\infty)$

(6) Punt d'inflexió $x = -2$

RESUM

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
	$y=0$						$+\infty$ | $+\infty$		$y=0$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$ $\cap$		$\searrow$ $\cup$		$\nearrow$ $\cup$		$\searrow$ $\cup$	
	$y=0$		$-2/9$		$-1/4$		$+\infty$ | $+\infty$		$y=0$

x	$f(x)$
-2	$-2/9$
-1	$-1/4$
0	0