COM CALCULEM DERIVADES A LA PRÀCTICA

Natàlia Castellana, 2020

TAULA

$f(x)$	$f'(x)$
$x^n,\ n\in\mathbb{R}$	$n x^{n-1} \quad n\in\mathbb{R}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Regles algebraiques de derivació

Siguin f, g dues funcions

(1) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(2) $k \in \mathbb{R} \quad (kf)'(x_0) = kf'(x_0)$

(3) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

(4) Si $g(x_0) \neq 0$,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Anem a fer uns quants exemples gimnàstics

(•) $f(x) = x^4 - 3x^3 - \frac{2}{x^2} = x^4 - 3x^3 - 2x^{-2}$

Aleshores

$$f'(x) = (x^4)' - 3(x^3)' - 2(x^{-2})' =$$

$$= 4x^3 - 9x^2 + 4x^{-3} =$$

$$= 4x^3 - 9x^2 + \frac{4}{x^3}$$

(•) $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

$$g'(x) = \frac{(x)'(x^2+1) - x\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{1\cdot(x^2+1) - x(2x+0)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

(•) $h(x) = \dfrac{\log_2 x}{x^2-x}$

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x\ln 2}\cdot(x^2-x) - \log_2 x\cdot(2x-1)}{(x^2-x)^2} =$$

$$= \frac{(x^2-x) - x\ln 2\,\log_2 x\,(2x-1)}{x\ln 2\,(x^2-x)^2}$$

I si volem calcular la derivada de $(x^2+1)^8$? Sabem que és un polinomi d'ordre 16. Només cal multiplicar 8 vegades (x^2+1) i després derivem.

Però veiem dos passos senzills

$$x \xmapsto{g} x^2+1$$
$$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \shortparallel$$
$$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad y \xmapsto{f} y^8.$$

$(x^2+1)^8 = f(g(x)) = (f\circ g)(x)$, és una composició de funcions!

La fórmula per derivar una composició de funcions es coneix com la regla de la cadena

<u>Regla de la cadena</u>: siguin f, g dues funcions. Si g té derivada a x, i f té derivada a $g(x)$ aleshores

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Així $\left[(x^2+1)^8\right]' = \left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$$= 8\,(x^2+1)^7\cdot 2x =$$
$$= 16x\,(x^2+1)^7$$

$f(x) = x^8$
$g(x) = x^2+1$

$f'(x) = 8x^7$
$g'(x) = 2x$

$(\cdot)$ $f(x) = \cos^3(\sin^4(x^2+1))$ s'escriu com una composició

$x \longmapsto x^2+1$
$ \;\; \| $
$ \;\; z \longmapsto \sin(z)$
$ \;\; \|$
$ \;\; w \longmapsto w^4$
$ \;\; \|$
$ \;\; t \longmapsto \cos t$
$ \;\; \|$
$ \;\; r \longmapsto r^3 = f(x)$

$$f'(x) = f'(r)\cdot r'(t)\cdot t'(w)\cdot w'(z)\cdot z'(x) =$$
$$= 3r^2 \cdot (-\sin t)\cdot 4w^3 \cdot \cos(z)\cdot 2x =$$
$$= 3\cos^2(\sin^4(x^2+1))\cdot(-\sin(\sin^4(x^2+1))\cdot$$
$$\cdot\, 4\sin(x^2+1)\cos(x^2+1)\cdot 2x$$

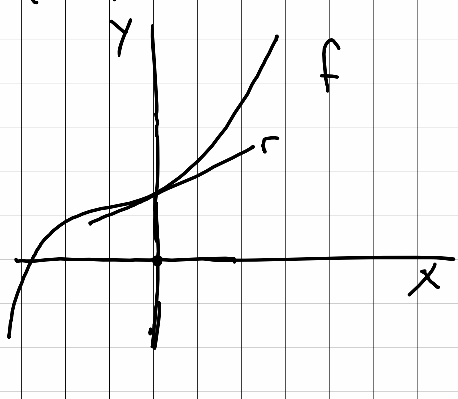
Què té d'especial la funció exponencial?

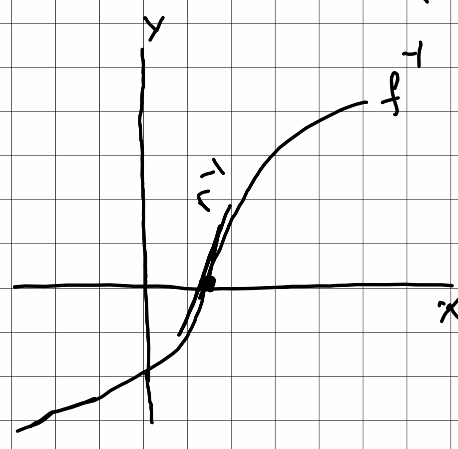
$$f'(x) = e^x$$

És a dir, la pendent de la recta tangent o la velocitat instantànea coincideix amb la pròpia funció.

Què ens falta? La funció inversa. Puc calcular la derivada de $f^{-1}(x)$ si conec $f'(x)$.

Recordeu la relació entre la gràfica de f i la seva inversa?





Al dibuixar la gràfica de f^{-1}, també estem fent la inversa de la recta tangent oi?

Quina és la inversa d'una recta $y = mx + n$?

$$y - mx - n = 0 \quad , \quad x = \frac{1}{m}y - \frac{n}{m}$$
$$-mx = -y + n$$

Per tant si una recta té pendent, la inversa té pendent $\frac{1}{m}$

DERIVADA DE LA INVERSA: Si f és una funció, $y = f(x)$, amb inversa f^{-1}, $x = f^{-1}(y)$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

si f és creixent o decreixent.

Exemples:

(1) Primer fem $f(x) = e^x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} =$$

$$= e^x \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{\text{sabem que val 1, no fàcil de calcular}} = e^x$$

I ara fem la seva inversa, $\ln(x)$.

$y = e^x$, $x = \ln(y)$

$$(\ln(y))' = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

En variable x, $\ln(x)' = \frac{1}{x}$.

Fixeu-vos que $a^x = e^{x \ln a}$ i per tant,

$$(a^x)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a.$$

I aleshores $(\ln_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

(2) I ara, d'on surten les derivades de les funcions trigonomètriques?

Cal fer servir una fórmula

$$\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Aleshores

$$(\sin(x))' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}_{\downarrow \; \cos(x)} \cdot \underbrace{\frac{\sin(h/2)}{h/2}}_{\downarrow \; 1} = \cos(x).$$

(recordeu $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$)

Aleshores $y = \sin(x)$, $x = \arcsin(y)$,

$$(\arcsin(y))' = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

(3) I la tangent? tampoc té cap misteri.

$f(x) = tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, és un quocient aleshores

$$f'(x) = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Aleshores si $\left\{\begin{matrix} y = tg x \\ x = arctg(y) \end{matrix}\right\}$ tenim

$$(arctg\, y)' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

(recordeu que $1 + tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$, aleshores $\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x}$)

La derivació logarítmica és un cas particular de la regla de la cadena

$$\left(\ln(f(x))\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Anem a veure com podem fer servir aquesta fórmula. DERIVACIÓ LOGARÍTMICA

① $f(x) = x^{\alpha}$ on $\alpha \in \mathbb{R}$ (e.g. $x^{\sqrt{2}}$), $x>0$

$$\ln(f(x)) = \log x^{\alpha} = \alpha \log x$$

$$\left(\log(f(x))\right)' = (\alpha \log x)' = \frac{\alpha}{x}$$

Així, $\dfrac{\alpha}{x} = \dfrac{f'(x)}{x^{\alpha}}$, aleshores

$$f'(x) = \frac{\alpha}{x} \cdot x^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}$$

② $f(x) = x^{x}$, $x>0$

$\ln f(x) = \ln(x^{x}) = x \ln x$. Podem derivar un producte,

$$\left(\ln f(x)\right)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Aleshores $f'(x) = f(x) \cdot \left(\ln(f(x))\right)' =$

$$= x^{x}(\ln x + 1)$$

③ D'on surt la fórmula de la derivada d'un quocient?

La derivació logarítmica ens diu

$$h'(x) = h(x) \cdot (\ln(h(x)))' \text{ oi?}$$

Prenem $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\ln h(x) = \ln f(x) - \ln g(x)$

$$(\ln(h(x))') = (\ln f(x) - \ln g(x))' =$$

$$= \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{f(x)\cdot g(x)}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{\cancel{f(x)}}{g(x)} \cdot \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\cancel{f(x)}\,g(x)} =$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$