USAIN BOLT, LA VELOCITAT INSTANTÀNEA I LA DERIVADA

Natàlia Castellana, 2020

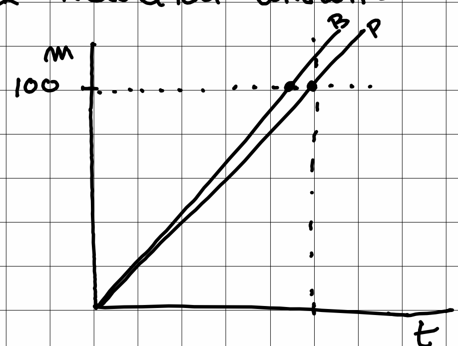
És Usain Bolt l'home més ràpid del món?
Sabem que el rècord mundial de velocitat en 100 m està en 9.69 segons. Això ens diu que la velocitat mitjana m/s és de

$$v_{mitjana} = \frac{100\ m}{9.69\ s} = 10.32\ m/s$$

L'anterior rècord en mans (o peus) d'Assafa Powell estava en 9.77 segons, per tant,

$$v_{mitjana} = \frac{100\ m}{9.77} = 10.24\ m/s$$

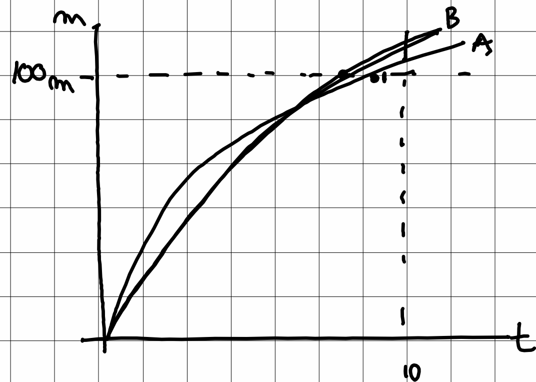
Ara bé, el que tenim doncs és que si tots corressim a velocitat constant



Veuríem una cosa així, Bolt arriba a 100 m abans que Powell.

Però en realitat no corren a velocitat constant!
Per saber qui és més ràpid hauríem la velocitat a cada instant de temps. Podria ser que les gràfiques no fossin rectes.

Podria ser per exemple,



Tot i que B arriba abans, A "accelera" molt més i sembla que arriba a anar més ràpid però al final afluixa.

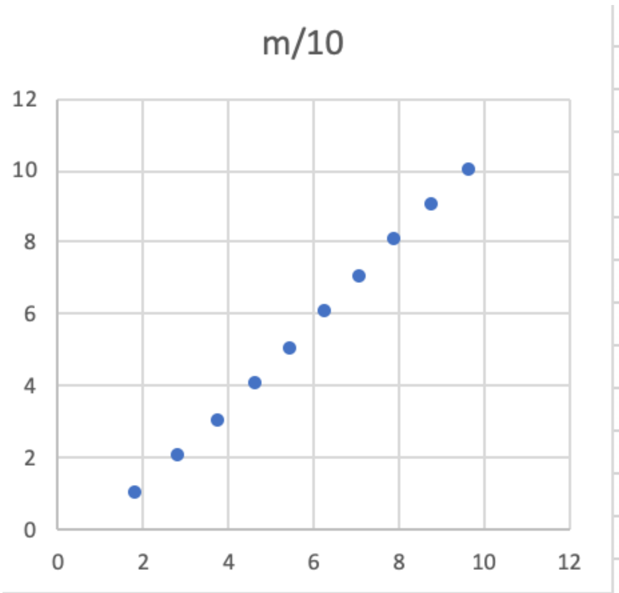
El que caldria és tenir mesures de temps en distàncies més curtes i així poder mesurar velocitats mitjanes en intervals més petits.

Fixeu-vos a la següent pàgina, on tenim mesures de cada 10 m.

Aleshores veiem que Bolt assoleix una velocitat de 12,20 m/s mentre que Powell arriba a 11.90 m/s.

m	Bolt	vBolt(m/s)	Powell	vPowell(m/s)
10	1,85	5,41	1,89	5,29
20	1,02	9,80	1,02	9,80
30	0,91	10,99	0,92	10,87
40	0,87	11,49	0,86	11,63
50	0,85	11,76	0,85	11,76
60	0,82	12,20	0,85	11,76
70	0,82	12,20	0,84	11,90
80	0,82	12,20	0,84	11,90
90	0,83	12,05	0,85	11,76
100	0,9	11,11	0,85	11,76
	9,69	**10,32**	**9,77**	**10,24**

temps	m/10
1,85	1
2,87	2
3,78	3
4,65	4
5,5	5
6,32	6
7,14	7
7,96	8
8,79	9
9,69	10



Com podem mesurar una velocitat instantània?

Podem aproximar-la fem velocitats mitjanes en intervals de temps cada cop més curts

$$v_h = \frac{\text{Posició en } t+h - \text{Posició en } t}{h}$$

seria una aproximació per saber la velocitat del corredor en l'instant de temps t, i fem tendir h a zero

$$\lim_{h \to 0} v_h .$$

Ara bé, la posició en funció del temps no és més que una funció, en podem pensar d'altres com el volum d'una caixa quadrada de costat x. Aquest mateix procediment ens diu com és la variació instantània del volum en funció del costat

$$V(x) = x^3$$

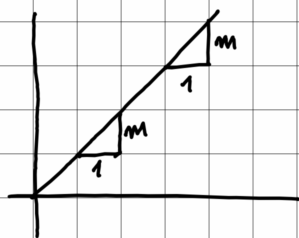
$$\frac{V(x+h) - V(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$$

El límit quan $h \to 0$ és $3x^2$, et sona?

Donada una funció $y=f(x)$, volem entendre a quina velocitat creix o decreix la variable y en relació a la variable x.

Per exemple, ja sabem que les rectes són funcions on aquesta variació és sempre constant



i no depèn de la variable x.

$$f(x) = mx+n, \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{m(x+h)+n-mx-n}{h}$$

$$= \frac{mh}{h} = m. \quad , \text{ no depèn de } h.$$

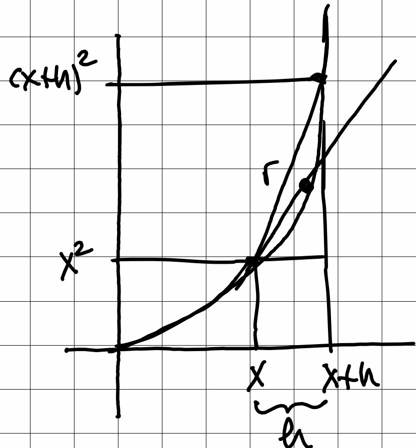
La variació és sempre constant però ja no passa el mateix en paràboles

$$f(x) = x^2, \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2-x^2}{h} =$$

$$= \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h$$

I el límit és $2x$ quan h tendeix a zero.

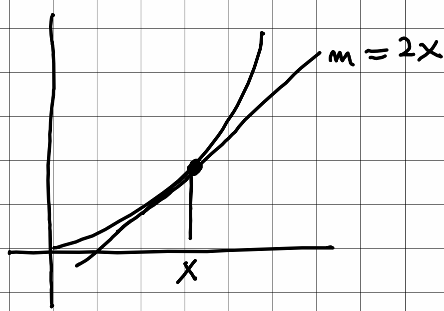
Això què vol dir?



La pendent de la recta r és just
$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$
La variació mitjana de la funció entre x i $x+h$.

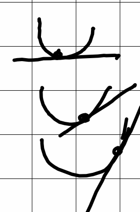
Si no coneguéssim f i haguéssim de buscar una funció entre x i $x+h$, agafaríem la recta de pendent la mitjana oi?

Quan $h \to 0$, obtenim la variació 'instantània'. És a dir, de totes les rectes que passen pel punt de la gràfica, la que té la mateixa variació és la recta tangent.



En el cas $f(x) = x^2$, tindrà pendent $2x$.

És a dir, si $x=0$, $m=0$
$x=1$, $m=2$
$x=2$, $m=4$



I això és la derivada, la funció que ens la variació (o 'rebutat') instantània d'una funció en un punt.

Així doncs la idea és molt simple. Sigui $f(x)$ una funció. Prenem un valor concret x_0, i si canviem una mica el valor a x_0+h, aleshores la funció passa de $f(x_0)$ a $f(x_0+h)$.

Per un canvi h en x_0, la funció canvia en $f(x_0+h) - f(x_0)$. La velocitat de canvi és

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Ara, la velocitat instantània en x_0 és

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Diem la derivada de $f(x)$ en $x = x_0$.
La funció derivada de f és aquella que en un valor x em retorna $f'(x)$.

<u>Exemple</u> Ja hem fet tres exemples:

(1) $f(x) = mx + n$ $\qquad f'(x) = m$

(2) $f(x) = x^2$ $\qquad f'(x) = 2x$

(3) $f(x) = x^3$ $\qquad f'(x) = 3x^2$

Així ja podem calcular l'equació de la recta tangent.

L'equació de la recta tangent a la funció $f(x)$ en $x = x_0$ és

$$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$$

ó $$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

<u>Exemple</u> Quina és la recta tangent a $f(x) = x^3$ en $x = 2$? Recordeu $f'(x) = 3x^2$

$$y = f'(2)(x-2) + f(2) = 3 \cdot 2^2 (x-2) + 2^3$$

$$y = 12(x-2) + 8$$

$$y = 12x - 16$$

<u>Pregunta</u> Donada $f(x)$, he de calcular límits cada cop que vull conèixer les derivades de $f(x)$?

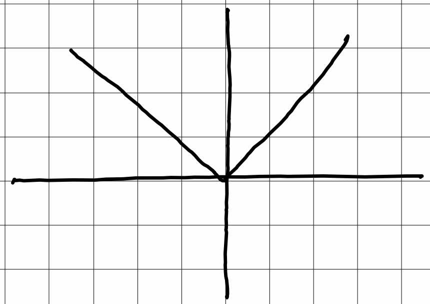
<u>Resposta</u> Hi ha gent que ja ho ha fet per tu!

Així, per calcular derivades ens cal

- Saber què fer amb les transformacions elementals
- Saber les derivades de funcions elementals
- Saber la derivada de composició de funcions.

WARNING: No sempre té sentit la definició de derivada.

$f(x) = |x|$



Quan és $f'(0)$?

$$\lim_{h\to 0} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \begin{cases} \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \\ \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \end{cases}$$

La funció $f(x) = \frac{x}{|x|}$ no és derivable en x_0,

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x>0. \end{cases}$$

PER PENSAR: Sigui $f(x) = |x^2-1|$, fes un esbós de la gràfica i digues en quins punts <u>no</u> és derivable.