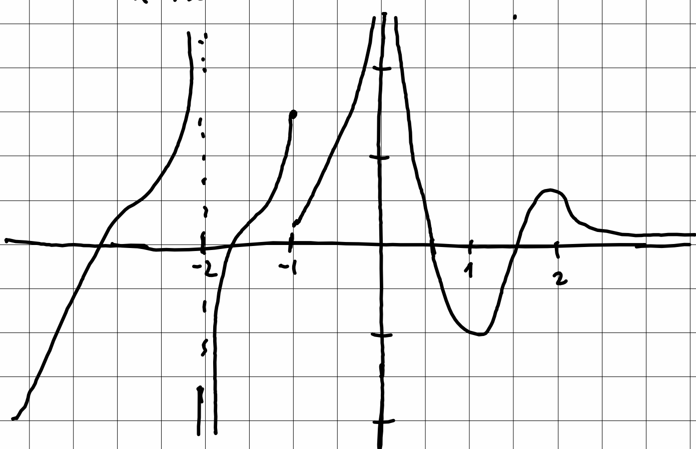
Límits i continuïtat (II)

Ja hem vist que el concepte de límit és clau en càlcul.

Si f és una funció, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si els valors de $f(x)$ estan arbitràriament a prop de L si x és proper a a, informalment.

Més formalment $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si cada cop que una successió $\{x_n\}$ té límit a, $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, obtenim que la nova successió $\{f(x_n)\}$ té límit L, $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$.



$\lim_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim_{x \to 1'5} f(x)$

$\lim_{x \to 0^+} f(x)$

$\lim_{x \to 0} f(x)$

$\lim_{x \to -1} f(x)$

$\lim_{x \to -2^+} f(x)$

$\lim_{x \to -2^-} f(x)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$

Si prenem $x_n > a$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Si prenem $x_n < a$ $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

Quan escrivim $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, expressem que la funció f pren valors arbitràriament grans si ens apropem prou a $x=a$. (Per $-\infty$, seran valors arbitràriament petits).

Per calcular límits, coneixem el comportament de funcions elementals i apliquem regles.

$$\lim_{x\to a} Mf(x) + N g(x) = M \lim_{x\to a} f(x) + N \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

Si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

Fem servir notacions simbòliques

$(\pm\infty) + L = \pm\infty$ $\qquad \frac{L}{\infty} = 0$

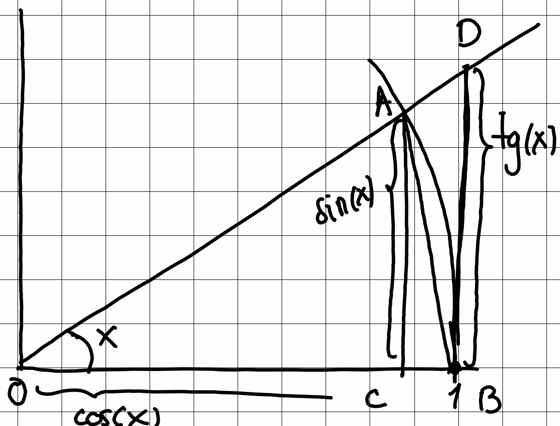
$(\pm\infty) \cdot L = \pm\infty \quad L>0 \quad \ldots \qquad \frac{L}{0} = \infty$ (signe?)

Però hi ha situacions que no es poden resoldre de forma genèrica i que depenen de les funcions concretes involucrades.

$$\frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 0\cdot\pm\infty \qquad \infty - \infty$$

Un límit important:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



Per similaritat de triangles

$$\frac{AC}{OC} = \frac{DB}{OB}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{DB}{1}$$

$$DB = tg(x)$$

Àrea OAB < Àrea Sector OBA < Àrea OBD

$$\frac{\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tg(x)}{2}$$

$$\sin(x) < x < tg(x)$$

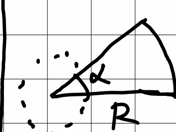
$$1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)} \qquad \sin(x) > 0$$

$$\cos(x) < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\lim_{x \to 0} \cos(x) \leq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \to 0} 1$$

$$1 \leq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Àrea sector



$$\frac{2\pi}{\alpha} \cdot A = \pi R^2$$

$$A = \alpha \cdot \frac{R^2}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3 - 10x^2 - 10^{10}x - 10^{110}$$

$$2x^3 - 10x^2 - 10^{10}x - 10^{110} = x^3\left(2 - \frac{10}{x} - \frac{10^{10}}{x^2} - \frac{10^{110}}{x^3}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Recordem} \\ \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \end{array}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(2 - \frac{10}{x} - \frac{10^{10}}{x^2} - \frac{10^{110}}{x^3}\right) = +\infty \cdot (2-0-0-0)$$
$$= 2\cdot(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3\left(2 - \frac{10}{x} - \frac{10^{10}}{x^2} - \frac{10^{110}}{x^3}\right) = -\infty \cdot 2 = -\infty$$

En general $\lim_{x\to+\infty} a_n x^n + \cdots + a_0 = \begin{cases} +\infty & a_n > 0 \\ -\infty & a_n < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to-\infty} a_n x^n + \cdots + a_0 = \begin{cases} -\infty & n \text{ senar}, a_n > 0 \\ +\infty & n \text{ senar}, a_n < 0 \\ +\infty & n \text{ parell}, a_n > 0 \\ -\infty & n \text{ parell}, a_n < 0 \end{cases}$$

Per funcions racionals ens trobarem amb situacions $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 5x - 4} = \dfrac{\infty}{\infty}$?

Dividim per la potència de major grau, x^2

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2 - 3/x + 1/x^2}{3 + 5/x - 4/x^2} = \frac{2}{3}$$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 - 3x + 1}{3x^2 + 5x - 4} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2 - 3/x^2 + 1/x^3}{3/x + 5/x^2 - 4/x^3} =$

$$= \frac{2}{0} = +\infty$$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{3x^3 + 5x - 4} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2/x - 3/x^2 + 1/x^3}{3 + 5/x^2 - 4/x^3} =$

$$= \frac{0}{3} = 0$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} \ ?$$

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & -2 \\ 1 & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$$

També ens podem trobar amb situacions $\infty - \infty$ al treballar amb polinomis

$$\lim_{x \to +\infty} x - \sqrt{x^2-1} = \infty - \infty \ ?$$

Convertim l'expressió en un quocient fent servir $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$a - b = \frac{a^2 - b^2}{a+b}$$

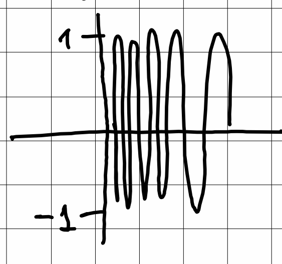
$$\lim_{x \to +\infty} x - \sqrt{x^2-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}{x+\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - (x^2-1)}{x+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} = 0$$

Nota Les indeterminacions $0 \cdot \infty$ es poden escriure com $\frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$ ó $\frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$?.

Anem a veure alguns exemples més interessants,

$\lim_{x \to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, aquí el problema d'entrada és que $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ no existeix



PERÒ està acotada $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

Així podem acotar el nostre límit

$$-1\cdot x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1\cdot x$$

$$-x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

Si ara prenem límits,

$$\lim_{x\to 0} -x \leq \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to 0} x$$

$$0 \leq \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$$

Per tant, $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

(Sabries calcular $\lim_{x\to\infty} \cos(x)\cdot\frac{1}{x}$?)

Un altre exemple que cal recordar és

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

(les exponencials sempre guanyen les potències)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1.01)^x}{x^n} = \infty$$

I com no, $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

$$\lim_{x\to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Aquesta situació correspon a resoldre indeterminacions del tipus 1^∞.

En general $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$ si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

Sigui $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{g(x)}$ on $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$

Aleshores fem les següent manipulacions

$$f(x)=1+f(x)-1=1+\frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}$$

$$f(x)^{g(x)}=\left(1+\frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{g(x)}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{g(x)\cdot(f(x)-1)\cdot\frac{1}{f(x)-1}}=$$

$$=\left[\left[1+\frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{g(x)(f(x)-1)}$$

Per tant, com que $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)-1}=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}=\infty$, tenim que

$$\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)(f(x)-1)}.$$

Recordeu que hem vist $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ i que per tant, $x \sim \sin x$ quan $x \to 0$.

Així $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 4x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$

Altres situacions com aquesta són

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1+\cos x} = 1 \cdot \frac{0}{2} = 0$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x} =$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

Aleshores $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x^2} = 1$, $1-\cos x \sim 2x^2$ si $x \to 0$.

Com ho apliquem?

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u/3} = 3$$

canvi $u = 3x$, $x = \frac{u}{3}$

si $x \to 0$, $\underbrace{3x}_{u} \to 0$

També tenim l'exemple $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$, així

$x \sim e^x - 1 \quad x \to 0$

$x + 1 \sim e^x$

• <u>Una aplicació dels límits a les representacions gràfiques</u>: les asímptotes.

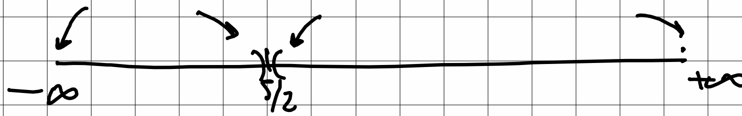
Un cop hem determinat el domini d'una funció, ens preguntem: com és el comportament de la funció quan ens apropem a la frontera del domini.

Per exemple, $f(x) = \frac{3x+7}{2x-5}$, quin és el subconjunt més gran de $\mathbb{R}$ on està definida f?

$$\text{Domini}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x - 5 \neq 0\} =$$

$$= \mathbb{R} - \{5/2\}$$

Així $(-\infty, 5/2) \cup (5/2, +\infty)$



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x+7}{2x-5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\,(3+7/x)}{x\,(2-5/x)} =$$

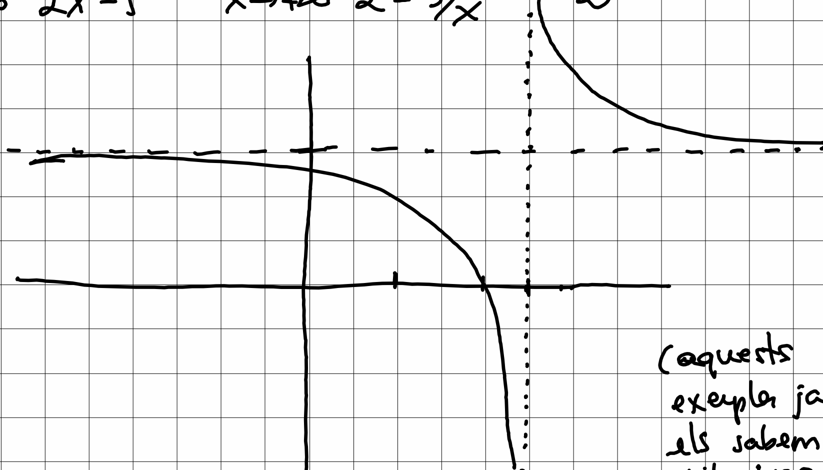
$\frac{-\infty}{-\infty}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{3+0}{2-0} = 3/2.$$

$$\lim_{\substack{x\to 5/2^- \\ x<5/2}} \frac{3x+7}{2x-5} = \frac{15/2+7}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 5/2^+ \\ x>5/2}} \frac{3x+7}{2x-5} = \frac{15/2+7}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+7}{2x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+7/x}{2-5/x} = \frac{3}{2}$$



(aquests exemples ja els sabem dibuixar)

DEFINICIÓ:

(1) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ diem que $y=L$ és una asímptota horitzontal a dreta.

Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ diem que $y=L$ és una asímptota horitzontal a esquerra.

(2) Si $a\in\mathbb{R}$ no és del domini i

- $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ diem que $x=a$ és una asímptota vertical per la dreta.
- $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ diem que $x=a$ és una asímptota vertical per l'esquerra.

Ara bé, quan $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ a vegades el creixement és proper a ser lineal, és a dir, $f(x)$ s'apropa a una recta.

(3) Diem que $y = mx+n$ és una asímptota obliqua (per la dreta / esquerra) si

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - (mx+n) = 0$$

Com calculem m i n si existeixen?

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad n = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx$$

Anem a veure un exemple, sigui $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-3}$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x-3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-3x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x-3} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{x-3} = 3$$

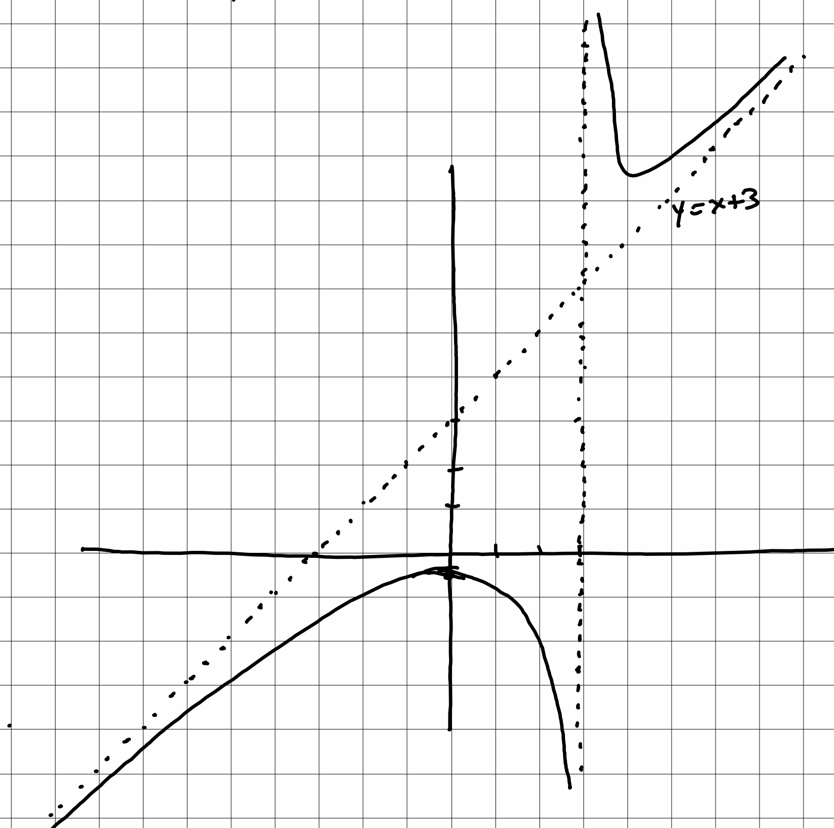
Així $y=x+3$ és una asímptota oblicua a dreta. Podem comprovar que també ho és a esquerra.

El domini de $f(x)$ és $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ i

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2+1}{x-3} = \frac{10}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2+1}{x-3} = \frac{10}{0^-} = -\infty$$

Podem comprovar (sage) que la gràfica és



Una funció deixa de ser contínua quan el seu domini no és un interval o bé quan en un punt del domini els límits a dreta i esquerra no coincideixen.

- $f(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x-2}$ Domini $= (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$
  No és contínua en $x=2$.

- $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ Domini $= \mathbb{R}$ però
  $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$
  $f(0) = 1$

Ara bé $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{x-2}} = 3$

$\frac{0}{0}$

Si definim

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & x \neq 2 \\ \alpha & x = 2 \end{cases}$$

és contínua sii $\alpha = 3$.

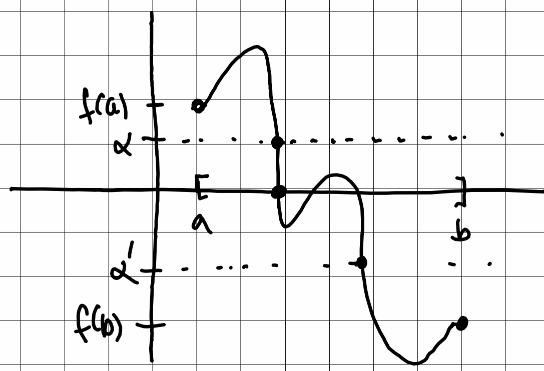
Posarem nom a un cert tipus de discontinuïtats

1. Discontinuïtat evitable : $\lim_{x\to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$
   $x=a$ no és del domini
2. Discontinuïtat de salt : existeix $f(a)$ però
   $\lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x) \in \mathbb{R}$,

3. Discontinuïtat essencial: $\lim_{x \to a} f(x)$ no és un nombre real, per exemple en les asímptotes verticals.

Per què ens agraden les funcions contínues? Anem a veure uns resultats sobre aquestes funcions que expliquen les seves bones propietats.

<u>Teorema dels valors intermitjos</u> Sigui $f: I \to \mathbb{R}$ una funció contínua on $I = [a,b]$ és un interval.
Si α és un valor comprès entre $f(a)$ i $f(b)$, alshores existeix $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = \alpha$



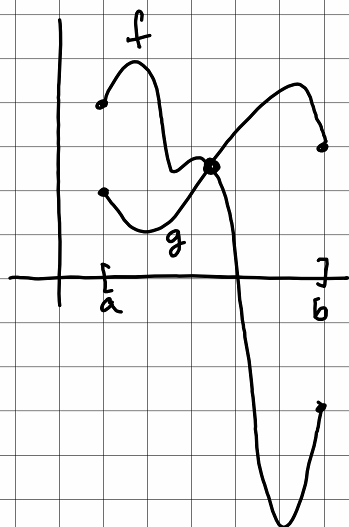
Un cas especial és el teorema de <u>Bolzano</u>: si $f(a)f(b) < 0$, és a dir, $f(a)$ i $f(b)$ tenen signe contrari alshores existeix $c \in [a,b]$ amb $f(c) = 0$

Una altra situació on aplica és el cas de tenir dues funcions contínues

$$f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tals que } \begin{array}{c} f(a) > g(a) \\ \text{i} \\ g(b) > f(b) \end{array}$$

(o al revés $f(a)>g(a)$ i $f(b)<g(b)$), ja que aleshores existeix $c\in[a,b]$ amb $f(c)=g(c)$.

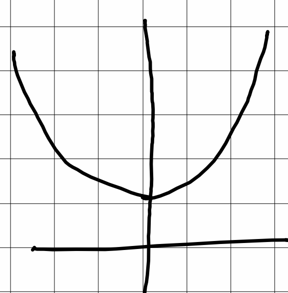
(si prenem $h(x)=f(x)-g(x)$ compleix el teorema de Bolzano)



(recordeu el problema del monjo?)

<u>FET</u> Tots els polinomis de grau senar tenen una arrel, és a dir, si $p(x)=a_n x^n+\cdots+a_0$ on n és senar, existeix com a mínim un $c\in\mathbb{R}$ amb $p(c)=0$.

Això no és cert si n parell, per exemple, $f(x)=x^2+1$



Si n senar tenim que

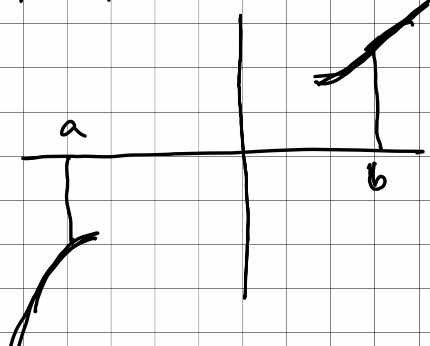
$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} x^n \left(a_n + \overbrace{\cdots + \frac{a_0}{x^n}}^{\to 0}\right) =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty} x^n\right)\cdot a_n = \begin{cases} +\infty & a_n>0 \\ -\infty & a_n<0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n \left(a_n + \cdots + \frac{a_0}{x^n}\right) =$$

$$= -\infty\cdot a_n = \begin{cases} -\infty & a_n>0 \\ +\infty & a_n<0. \end{cases}$$

Per tant, hi ha números $a,b\in\mathbb{R}$ tals que $p(a)p(b)<0$. Aleshores, pel teorema de Bolzano existeix

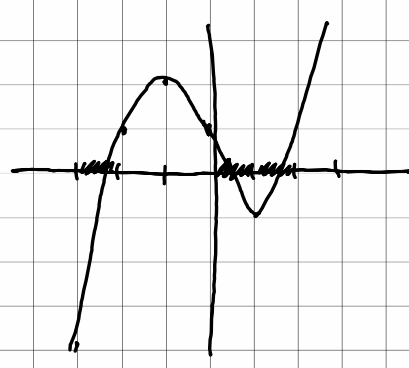


$c\in[a,b]$

amb $p(c)=0$.

Per exemple, estudiem x^3-4x+2 a l'interval $[-3,3]$. Hi ha tres intervals amb canvi de signe

x	$p(x)$
-3	-13
-2	2
-1	5
0	2
1	-1
2	2
3	17

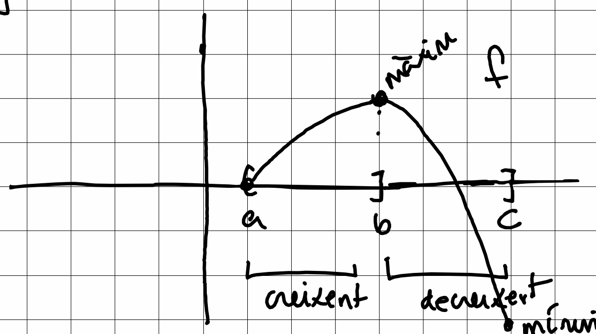


Una altra teorema important estudiar màxims i mínims absoluts.

Si $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció, diem que és creixent si $f(x) > f(y)$ sempre que $x > y$, decreixent si $f(x) < f(y)$ sempre que $x > y$.

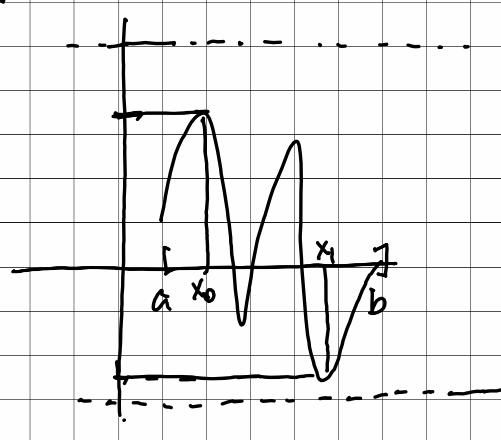
x_0 és un màxim absolut si $f(x_0) \geq f(x)$ per tot $x \in [a,b]$

x_0 és un mínim absolut si $f(x_0) \leq f(x)$ per tot $x \in [a,b]$



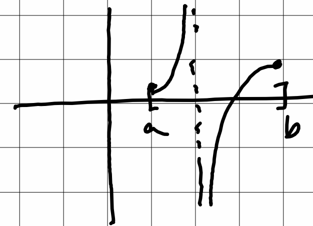
<u>Teorema de Weierstrass</u>: Sigui $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicació contínua, aleshores hi ha un mínim i un màxim absoluts, és a dir, $x_0 \in [a,b]$ amb $f(x_0) \geq f(x)$ per tot $x \in [a,b]$ i $x_1 \in [a,b]$ amb $f(x_1) \leq f(x)$ per tot $x \in [a,b]$.

f és acotada

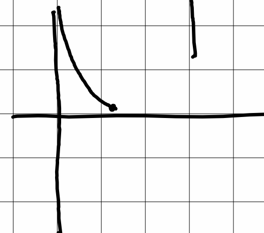


Aquest resultat no és cert si:

- la funció no és contínua



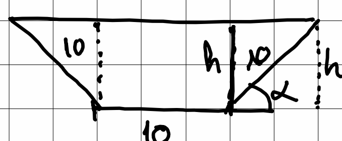
- l'interval no és tancat



$\frac{1}{x} : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

Aquests resultats són usats en teoremes d'optimització per assegurar que existeixen solucions

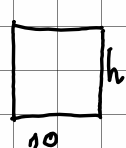
<u>Problema</u> Volem fer una canalera de conducció d'aigua amb una làmina de 30 cm d'amplada doblegant 10 cm els laterals. Quin angle hem de doblegar els laterals si volem que hi passi el màxim volum d'aigua?

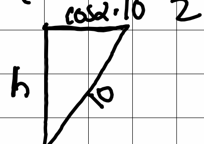


Volem que la superfície d'aquesta figura sigui màxima, $S(\alpha)$

$\sin(\alpha) = \frac{h}{10}$, $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{100-h^2}}{10}$

$S(\alpha) = 10 \cdot h + 2 \cdot \left(10 \cos\alpha \cdot \frac{h}{2}\right) =$





$$S(\alpha) = 10 \cdot 10(\sin\alpha) + 10^2 \cos\alpha \cdot \sin\alpha =$$

$$= 100\left(\sin\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha\right) =$$

$$= 100\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right)$$

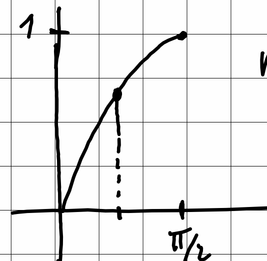
$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

Així $S : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$S(\alpha) = 100\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right)$$

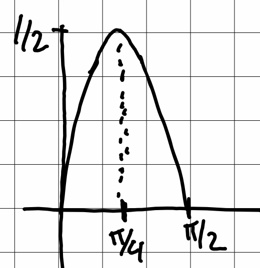
Com que S és contínua en $[0, \pi/2]$ tenim que segur que pren un valor màxim (i mínim, però aquest és fàcil, $S(\alpha) \geq 0$).

Podem trobar-lo? $\sin(\alpha)$ és creixent



màxim a $\pi/2$

$\frac{1}{2}\sin(2\alpha)$



Estarà a $\left[\frac{\pi}{4}, \pi/2\right]$

... més al següent capítol!