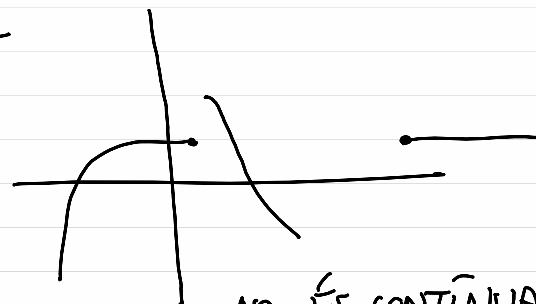
→ Què és una aplicació contínua?

La primera definició d'aplicació contínua que mai us han donat és

- és una funció tal que la seua gràfica es pot dibuixar sense aixecar el llapis del paper

CONTÍNUA



NO ÉS CONTÍNUA

Però com ho formalitzem amb un llenguatge "matemàtic". D'alguna manera el que diem és que una funció contínua és "previsible" en un cert sentit. Per això usem la idea de límit.

<u>Definició</u> Una funció $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, és contínua en el punt $a \in A$ si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

<u>Nota</u> $\lim_{x \to a} x = a$ per definició! Alehores diem que f és contínua en a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x)$

Fem un pas enrera ... què és un límit?

LÍMITS DE SUCCESSIONS

Sigui $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{a_1, a_2, a_3, \dots\} \subset \mathbb{R}$ una successió de números naturals. Per exemple,

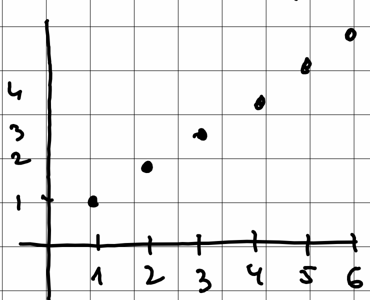
1) $\{1, 2, 3, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}$ $\quad a_n = n$

2) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\}$ $\quad a_n = \frac{1}{n}$

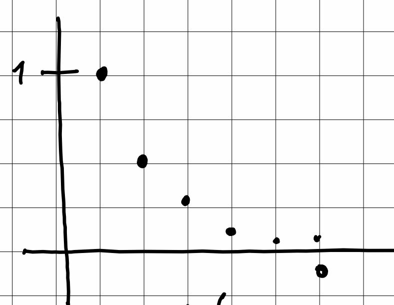
3) $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$ $\quad a_n = (-1)^n$

4) $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$ $\quad a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

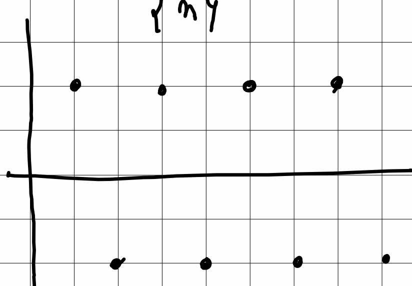
Les successions les podem representar també gràficament:

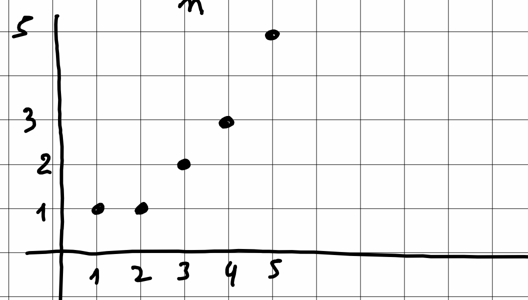


$\{n\}$



$\{\frac{1}{n}\}$

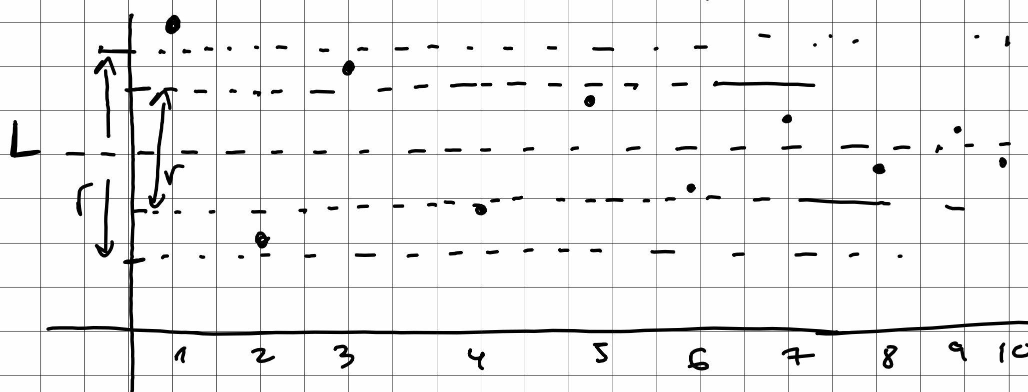




Què és el límit d'una successió? Sigui $L \in \mathbb{R}$, diem que $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ si per tot $r>0$ existeix $N \in \mathbb{N}$, tal que

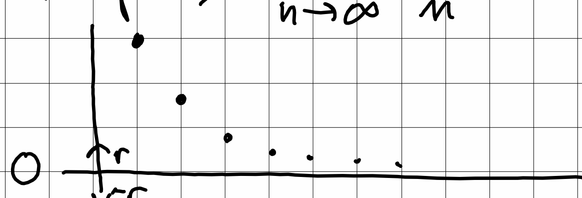
$$|a_n - L| < r \quad \text{per } n > N$$

(per qualsevol $r>0$, per petit que sigui, existeix una posició N de manera que a partir d'aquesta tots els valors de la successió estan a distància de L menor que r)



Quan feis franges $L \uparrow r$, $\downarrow -r$, només un nombre finit de punts queden a fora i tota la resta entra. No importa com de petit sigui r.

Per exemple, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Per què?



Si fixo $r>0$, és cert que $\frac{1}{n} < r$ per n prou gran? Quan $\frac{1}{n} < r$?

Doncs si $n > \frac{1}{r}$!

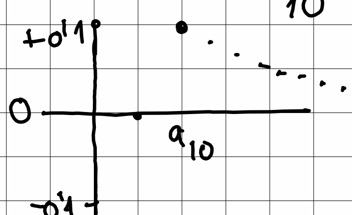
Si $r = \frac{1}{100} = 0'01$, $\frac{1}{n} < r$ per $n > 100$

Si $r = 10^{-8}$, $\frac{1}{n} < r$ per $n > 10^8$

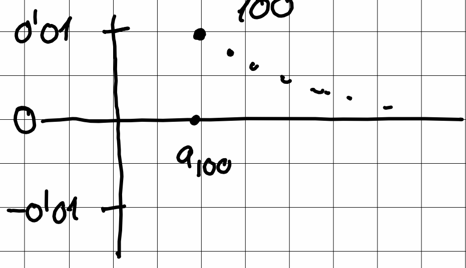
$\vdots$

Fixeu-vos que donat $r>0$, fem un zoom de manera que només es vegi $(L-r, L+r)$, aleshores podem tallar els primers termes i veiem la resta de la successió dins de l'interval.

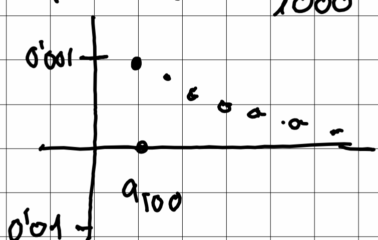
$r = 0'1 = \frac{1}{10}$



$r = 0'01 = \frac{1}{100}$



$r = 0'001 = \frac{1}{1000}$



etc... per qualsevol valor per petit que sigui

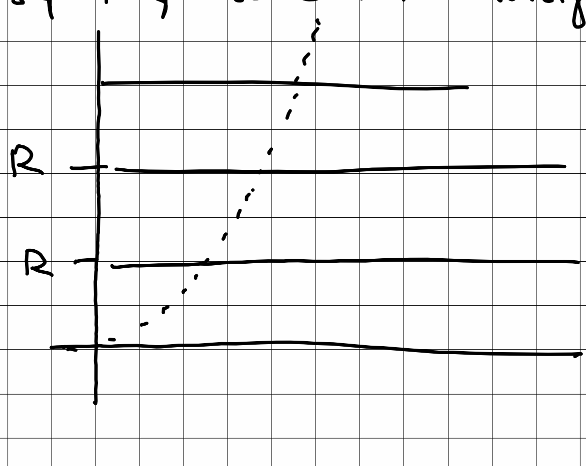
- Experimenteu amb la successió $\frac{(1.01)^n}{n^4}$ prenent valors. Quin és el límit?

No totes les successions tenen límit $L \in \mathbb{R}$. Per exemple, si no estan acotades.

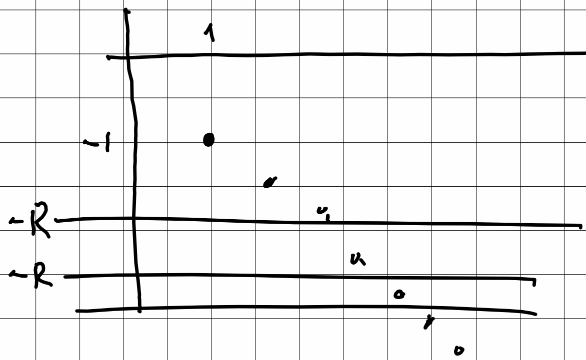
Si donada una successió es compleix que per qualsevol $R > 0$, existeix una posició n_0 per la qual $a_n > R$ (respectivament $a_n < -R$) a partir de n_0, $n > n_0$, aleshores diem que no està acotada superiorment (resp. inferiorment)

Aleshores $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (resp. $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$)

Per exemple, $\lim_{n\to\infty} 2n+1 = +\infty$ ja que donat $R > 0$, $2n+1 > R$ si $n > \frac{R-1}{2}$. La successió supera qualsevol línia horitzontal $y = R > 0$.



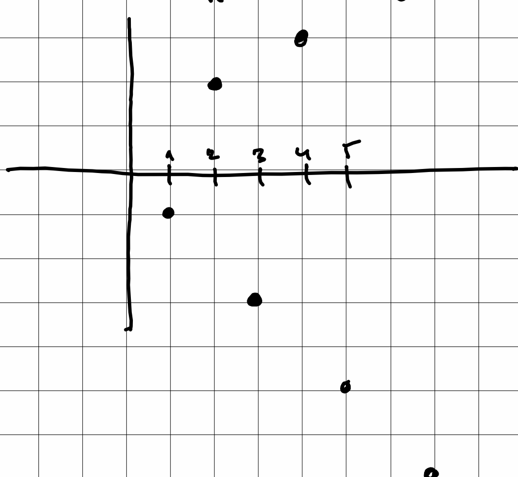
Per exemple, $a_n = -n^3$,



$-n^3 < -R$
si
$n > \sqrt[3]{R}$.

$$\lim_{n\to\infty} -n^3 = -\infty$$

En canvi $a_n = (-1)^n n$ no té límit. No compleix cap de les tres situacions anteriors



Com calculem límits? Doncs coneixent els límits de funcions elementals i com es comporten respecte transformacions de funcions. Cal recordar les següents propietats:

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} Rc_n = R \lim_{n\to\infty} c_n \quad , R \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{\to} a_n}{\lim_{\to} b_n} \quad \text{si} \quad \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$$

Què fem si els límits corresponen a situacions no acotades que donen $+\infty, -\infty$?

$$(\pm\infty) + L = \pm\infty \qquad L \in \mathbb{R} \quad ; \quad \frac{1}{\infty} = 0$$

$$(\pm\infty) \cdot L = \pm\infty \qquad L > 0 \quad ; \quad \frac{1}{0} = \infty^{*}$$

Però $\frac{\infty}{0} = \infty^{*}$

$\frac{0}{\infty} = 0$

(*) el signe caldrà decidir-lo en cada cas.

Ara bé, hi ha casos en que no hi ha una fórmula general i cal decidir cas a cas

Què resulta de $\frac{\infty}{\infty}$? DEPÈN! Fixeu-vos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

Què resulta de $\frac{0}{0}$? DEPÈN!

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

Què resulta de $0 \cdot \infty$? DEPÈN!

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot n^2 = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Aquestes situacions es denominen

INDETERMINACIONS!

Exemples

(1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+8}{5n^2+n} = \frac{\infty}{\infty} \ ??$$ (quin és més 'potent' el numerador o denominador?)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+8}{5n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^2+8}{n^2}}{\frac{5n^2+n}{n^2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3+8/n^2}{5+1/n} = \frac{3+0}{5+0} = \frac{3}{5}$$

(2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}+n}{n^4+2} = \frac{\infty}{\infty} \ ??$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}+n}{n^4+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n^3}+n}{n^4}}{\frac{n^4+2}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^{3/2}}{n^4}+\frac{n}{n^4}}{\frac{n^4}{n^4}+\frac{2}{n^4}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{5/2}}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{2}{n^4}} = \frac{0+0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$$

(3) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1} = \infty + \infty = \infty$$

PERÒ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} = \infty - \infty \ ???$$

Un truc per convertir una resta en un quocient que té una suma, ... a continuació ....

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+n}\right)^2 - \left(\sqrt{n^2+1}\right)^2}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+n) - (n^2+1)}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2-1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}}$$

Fixeu-vos que el grau del numerador és 1 i el grau del denominador també! $\sqrt{n^2+n}$ té grau $2 \cdot \frac{1}{2}$.

Dividim tot per n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}} + \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} =$$

$$= \frac{1-0}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}.$$

EL NÚMERO e

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Si volguéssim calcular $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ directament resulta una indeterminació 1^∞ - per què?
No estem parlant de 1^n que és 1, estem parlant de valors propers a 1 i per exemple
1.01^n va a ∞ i 0.99^n va a zero.
I en el cas

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ obtenim } e!$$

$$\boxed{\text{En general: } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e \text{ si } \lim_{n\to\infty} a_n = \infty}$$

Exemple de càlcul:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+n}\right)^n = 1^\infty ??$$

Anem a convertir-la a la forma

$$1+\frac{1}{\square}$$

$$\frac{n^2+1}{n^2+n} = 1 + \frac{n^2+1}{n^2+n} - 1 = 1 + \frac{n^2+1-n^2-n}{n^2+n} =$$

$$= 1 + \frac{1-n}{n^2+n} = 1 + \frac{1}{\frac{n^2+n}{1-n}}$$

Així $\left(\frac{n^2+1}{n^2+n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2+n}{1-n}}\right)^n$

$$= \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2+n}{1-n}}\right)^{n \cdot \frac{n^2+n}{1-n} \cdot \frac{1-n}{n^2+n}} =$$

$$= \Bigg[\underbrace{\left(1 + \frac{1}{\frac{n^2+n}{1-n}}\right)^{\frac{n^2+n}{1-n}}}_{\text{té límit } e}\Bigg]^{n \cdot \frac{1-n}{n^2+n}}$$ alashores

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+n}\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{n-n^2}{n^2+n}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

[Si repassem els passos que hem fet queda

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{a_n-1}}\right)^{\frac{1}{a_n-1}}\right]^{b_n \cdot (a_n-1)} = e^{\lim_{n\to\infty} b_n (a_n-1)}$$]

si $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

Ja sabeu quan és $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(1.01)^n}{n^4}$

- Recordeu el binomi de Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^0b^n + \binom{n}{1}a^1b^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b + \binom{n}{n}a^nb^0$$

$$\left(1+\frac{1}{100}\right)^n = \left(\frac{1}{100}\right)^n + n\left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} + \dots + n\frac{1}{100} + 1$$

$$1.01^n > 1 + n\cdot 0'01 \quad \text{si } n\geq 1$$

$$1.01^n > 1 + n\cdot 0'01 + \frac{n(n-1)}{2}0.01^2 \quad \text{si } n\geq 2$$

$$\vdots \qquad 1 + n\cdot 0.01 + \frac{n^2-n}{2}\cdot 0.01^2$$

$$1.01^n > 1 + n\cdot 0.01 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}0.01^3 \quad n\geq 3$$

$$\vdots$$

$$1.01^n > 1 + n\cdot 0.01 + \dots + \binom{n}{k}\cdot 0.01^k \quad n\geq k$$

polinomi grau $k-1$

Aleshores $\displaystyle\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\geq k}}\frac{(1.01)^n}{n^4} > \lim_{\substack{n\to\infty\\ n\geq k}}\frac{\text{polinomi grau } k-1}{n^4} = \infty$

si $k-1>4$

- En general $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = \infty$ si $a>1$.

ja que a^n creix més ràpid que qualsevol polinomi a partir d'un cert n prou gran.

LÍMITS DE FUNCIONS

Tornem a les funcions contínues i ara parlem de límits de funcions.

En aquest cas sigui $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ un funció amb domini $A \subset \mathbb{R}$. Sigui $a \in \mathbb{R}$,

$\lim_{x \to a} f(x) = l$ si per valors que s'aproxim a $a \in \mathbb{R}$ aleshores les imatges per f s'aproximen a l.

És a dir, si cada cop que tinc una successió $\{a_n\}$ amb $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ es compleix que

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = l.$$

(si $a_n > a$ aleshores $\lim_{x \to a^+} f(x) = l$, límit per la dreta

si $a_n < a$ aleshores $\lim_{x \to a^-} f(x) = l$, límit per esquerra)

El valor de l pot ser també $\pm\infty$. El límits de funcions compleixen les mateixes propietats que els de successions.

Per exemple, sigui $\{a_n\}$ amb $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ i $f(x) = x^2 + 1$.

Aleshores $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n^2 + 1 = (\lim_{n\to\infty} a_n)^2 + 1 = 0+1$
$= 1$

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ aleshores $\lim_{n\to\infty} f(a_n) =$

$$= \lim_{n\to\infty} a_n^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5.$$

També podem considerar $a = \pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

'Els valors de $f(x)$ estan arbitrariament a prop de L si x és a prop d'a'

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Al calcular límits ens trobem igualment amb indeterminacions com en el cas de les successions

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 1^\infty, 0 \cdot \infty.$$

Anem a veure exemples

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 5x - 4} = \frac{2}{3} \quad \text{per què?} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2}}{\frac{3x^2 + 5x - 4}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2}} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\frac{5}{2}} \frac{3x+7}{2x-5} = \frac{15/2 + 7}{0} = \infty \ ?? \ \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$$

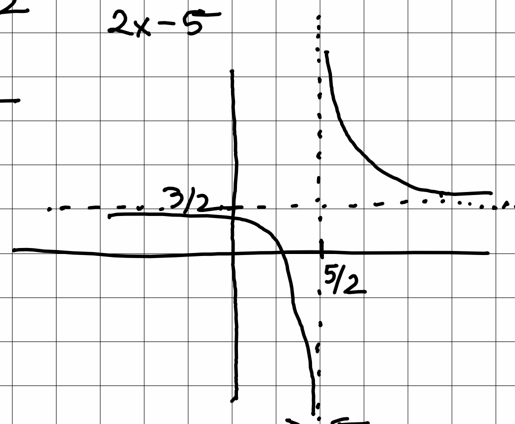
Hem de distingir si el denominador és > 0 o < 0.

$$\lim_{\substack{x \to 5/2^+ \\ x > 5/2}} \frac{3x+7}{2x-5} = \frac{32/2}{\underbrace{0^+}_{>0}} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 5/2^- \\ x < 5/2}} \frac{3x+7}{2x-5} = \frac{32/2}{\underbrace{0^-}_{<0}} = -\infty$$

Recordeu $\dfrac{3x+7}{2x-5} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{32/2}{2x-5}$

$$\begin{array}{r|l} 3x+7 & 2x-5 \\ \hline -\left(3x - \frac{18}{2}\right) & \frac{3}{2} \\ \hline \frac{32}{2} & \end{array}$$



$\lim_{x \to 5/2^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to 5/2^+} f(x) = +\infty$

Per calcular límits de funcions, igual que per successions, és important conèixer els límits per funcions elementals i estratègies per calcular situacions indeterminades.

És important no oblidar els signes.