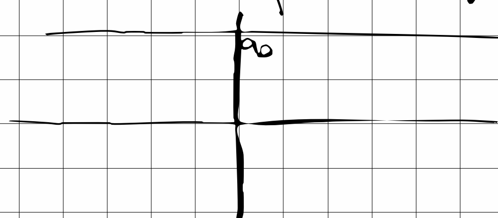
Un petit zoològic de funcions elementals

Anem a posar nom i a veure algunes propietats bàsiques de funcions elementals.

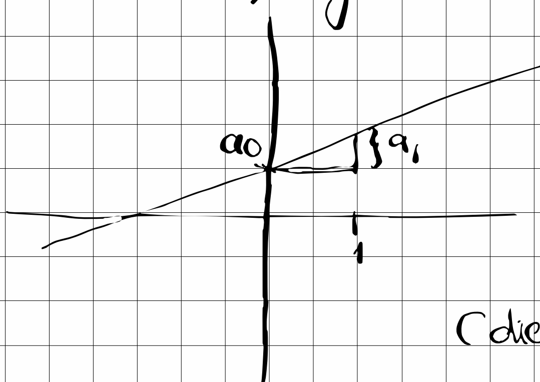
(A) Funcions polinomials o polinòmiques

Són de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ on $a_i \in \mathbb{R}$

Si $n=0$ alehores $f(x) = a_0$, la funció constant



Si $n=1$, $f(x) = a_1 x + a_0$. Sabem que la gràfica és una recta, ja que cada cop que x varia en una unitat, y varia en a_1 sempre



$f(0) = a_0$

$f(1) = a_0 + a_1$

$f(x+1) = f(x) + a_1$

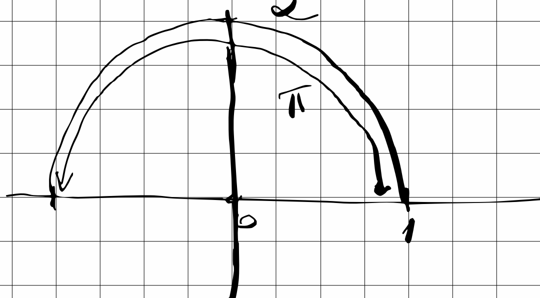
(diem que f és lineal)

Ja hem vist un cas, $L(x) = 2\pi x$.

$$L(x+1) = L(x) + 2\pi$$

Independentment del radi, quan aquest augmenta en una unitat, la longitud de la circumferència augmenta en 2π.
Experimentalment,

$$\frac{L(x+1) - L(x)}{2} = \pi$$



$$\pi = \frac{L(1)}{2}$$

Si $n=2$ tenim polinomis de grau 2 ($a_2 \neq 0$).
Tot polinomi de grau 2 es pot escriure a partir de x^2 fent transformacions (dilatacions contraccions i traslacions).

Fem servir la fórmula $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$$(A+B)^2 - B^2 = A^2 + 2AB$$

quan $A = x$

$$x^2 + 2Bx = (x+B)^2 - B^2$$

$2B = b$ $\qquad x^2 + bx = (x + b/2)^2 - \frac{b^2}{4}$

Aleshores tenim ...

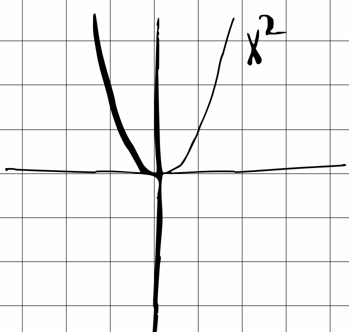
$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

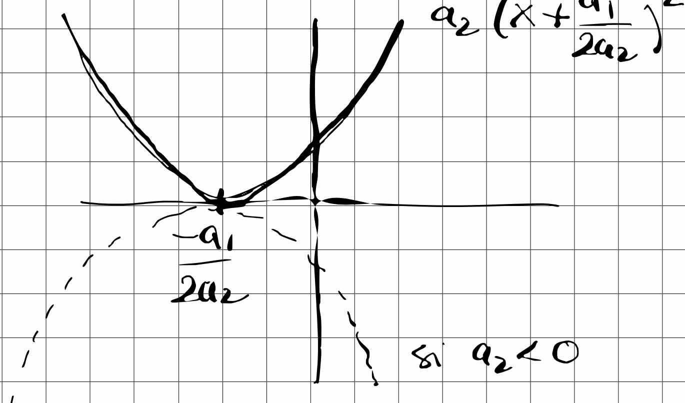
$$= a_2 \left(x^2 + \frac{a_1}{a_2} x\right) + a_0$$

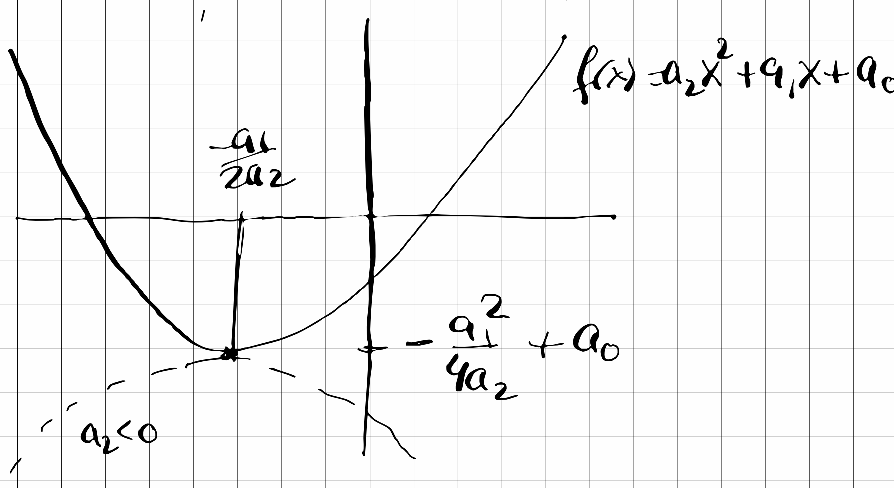
$$= a_2 \left[\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_1^2}{4a_2^2} \right] + a_0$$

$$= a_2 \underbrace{\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2}_{\text{traslladem eix horitzontal}} \underbrace{- \frac{a_1^2}{4a_2} + a_0}_{\text{traslladem eix vertical}}$$

dilatació
contracció
simetria
($a_2 < 0$)







Per tant, totes les gràfiques de polinomis de grau 2 són paràboles.

Per exemple,

$$h(t) = h_0 - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{on } g = \text{acceleració gravitatòria}$$

descriu l'alçada d'una caiguda lliure

$$h(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h_0$$

Per quins valors de t, l'objecte està entre $\frac{h_0}{2}$ i $\frac{h_0}{4}$?

$$\frac{h_0}{4} \leq -\frac{1}{2} g t^2 + h_0 \leq \frac{h_0}{2}$$

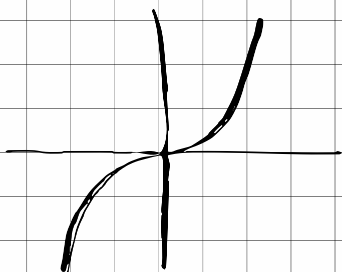
$$-\frac{3h_0}{4} \leq -\frac{1}{2} g t^2 \leq -\frac{h_0}{2}$$

$$\frac{3}{4} h_0 \geq \frac{1}{2} g t^2 \geq \frac{h_0}{2}$$

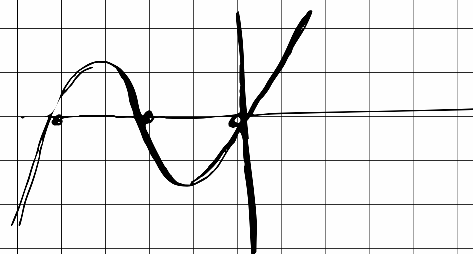
$$\frac{3}{2g} h_0 \geq t^2 \geq \frac{h_0}{g} \quad ??$$

Per polinomis de grau ≥ 3 no hi ha una forma "standard"...

$f(x) = x^3$



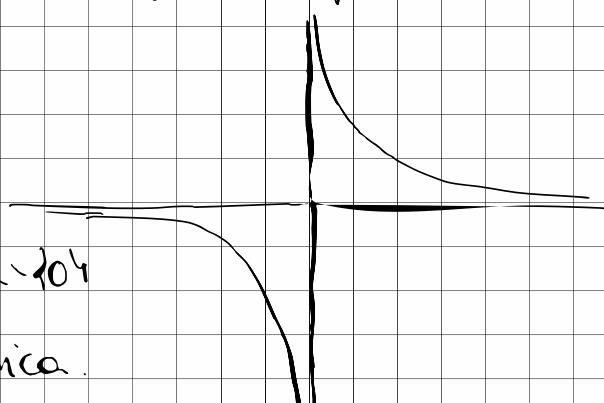
$f(x) = x(x+1)(x+2) =$
$= x^3 + 3x^2 + 2x$



(B) Funcions racionals $f(x) = \dfrac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m}$

Anem a veure alguns exemples, el més senzill

$f(x) = \dfrac{1}{x}$



$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$

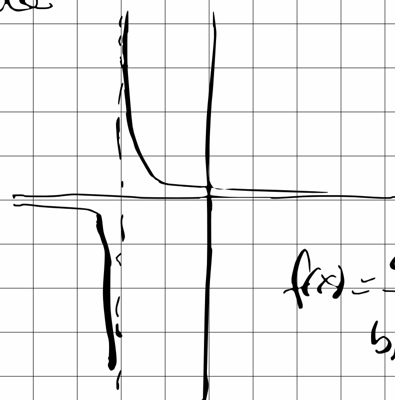
És antisimètrica.

Anem a fer algun exemple,

Si $f(x) = \dfrac{a_0}{b_1 x + b_0} = \dfrac{a_0}{b_1}\left(\dfrac{1}{x + \frac{b_0}{b_1}}\right)$

dilatació
contracció
simetria

traslladem $\dfrac{1}{x}$



$f(x) = \dfrac{a_0}{b_1 x + b_0}$

$\dfrac{1}{x + \frac{b_0}{b_1}}$

Un cas particular,

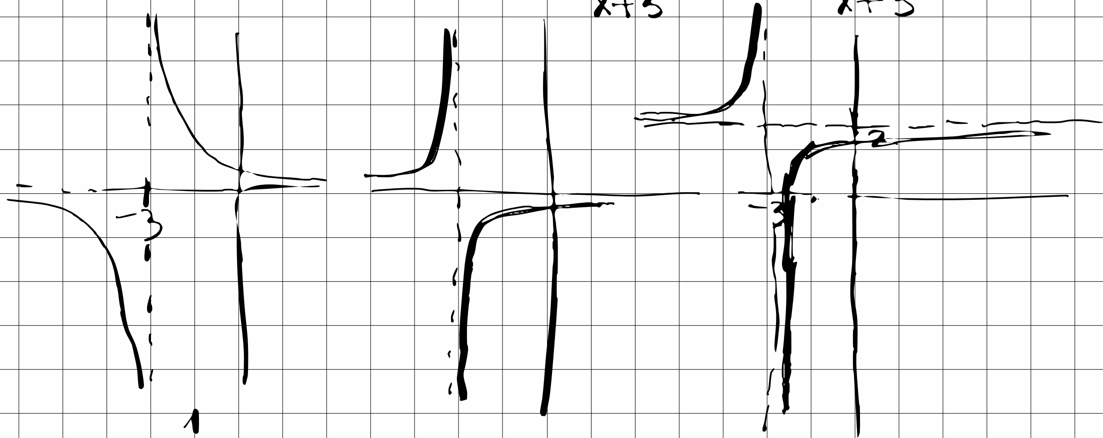
$f(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$. Com que el grau del numerador és més gran o igual que el del denominador, sempre podem simplificar la funció fent la divisió de polinomis

$$
\begin{array}{r|l}
2x+1 & x+3 \\ \cline{2-2}
-2x+6 & 2 \\ \cline{1-1}
-5 &
\end{array}
$$

$$\frac{2x+1}{x+3} = \frac{2(x+3)-5}{x+3}$$

$$= 2 - \frac{5}{x+3}$$

Ahora $f(x) = \frac{2x+1}{x+3} = 2 - \frac{5}{x+3}$



$\frac{1}{x+3}$ $\quad$ $-\frac{5}{x+3}$

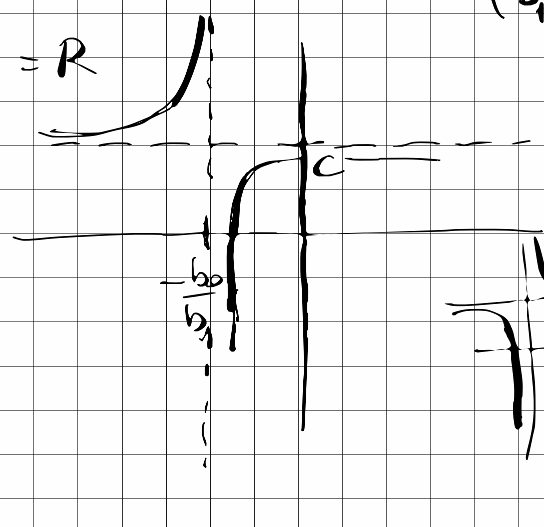
En general, $f(x) = \frac{a_1x+a_0}{b_1x+b_0} = C + \frac{R}{b_1x+b_0}$

on

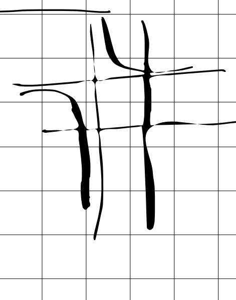
$$\begin{array}{l|l} a_1x+a_0 & b_1x+b_0 \\ \hline -a_1x + \frac{b_0a_1}{b_1} & C = \frac{a_1}{b_1} \\ \hline a_0 - \frac{b_0a_1}{b_1} = R & \end{array}$$

$$\parallel$$

$$C + R\left(\frac{1}{b_1\left(x+\frac{b_0}{b_1}\right)}\right)$$



o bé

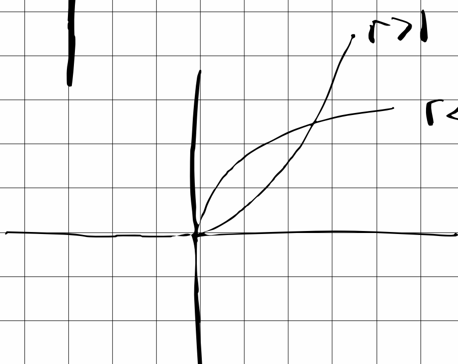


(C) Funcions potencials $f(x) = kx^r$

on ara $k \neq 0$, r no és enter.

Per exemple, $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$

És inversa de $f(x) = x^2$ on $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$.



$r>0$.

(D) Les funcions exponencials

Què és a^x?

Si $n \in \mathbb{N}$, $a^n = \overbrace{a \cdots a}^{n)}$ i $\left\{ \begin{array}{l} (a^n)^m = a^{nm} \\ a^{n+m} = a^n \cdot a^m \end{array} \right\}$

Aleshores si $p \in \mathbb{Z}$,

$$a^p \cdot a^{-p} = a^0 = 1$$

, i tenim sentit per a^p on $p<0$.

$$a^p = \frac{1}{a^{-p}}$$

Si $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, aleshores $a^{p/q} = (a^{1/q})^p$ i

$(a^{1/q})^q = a$, per tant $a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$.

Així $a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$.

Però i si $x \in \mathbb{R}$, qui és a^x? Escrivim x com una expressió decimal

$x = x_0.x_1x_2x_3\ldots\ldots$. Fem $a^{x_0}, a^{x_0.x_1}, \ldots a^{x_0.x_1\ldots}$

$\exists$ $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{q_n}$ $q_n \in \mathbb{Q}$ $\{q_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

Per exeple

$$3^{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} 3^{a_n}$$

$a_0 = 1$
$a_1 = 1'4$
$a_2 = 1'41$
$a_3 = 1'414$
$a_4 = 1'4142$
$\vdots$

$\sqrt{2} = 1,414213\ldots$

<u>Propietats</u>: $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$

(1) $a^{x+y} = a^x a^y$ $x, y \in \mathbb{R}$

(2) $a^{x-y} = a^x / a^y$ "

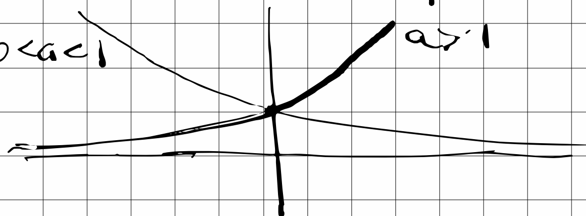
(3) $(a^x)^y = a^{xy}$

(4) $(ab)^x = a^x b^x$

(5) $f(x)=a^x$ $\qquad$ $\mathrm{Im}(f)=(0,+\infty)$

$f(0)=1$ $\qquad$ $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$

(6) $0<a<1$ $\qquad$ $a>1$

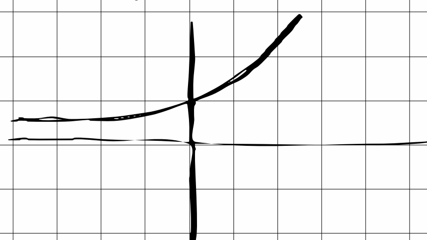


CAS IMPORTANT: $a=e$, qui és e?

$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ és una successió creixent i acotada,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

$f(x)=e^x$



La funció $f(x)=a^x$ és injectiva i per tant té inversa on està definida. És el logaritme.

Definició: $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$

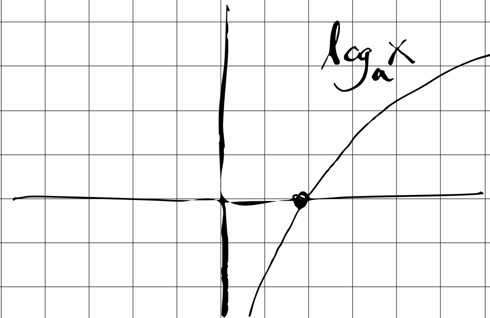
$$\log_a x=b \quad \text{sii} \quad a^b=x$$

Per exemple $\log_a a^b=b$, $\quad a^{\log_a b}=b$

$\qquad b\in\mathbb{R} \qquad\qquad b>0$

La funció $g(x) = \log_a x$ és inversa de $f(x) = a^x$, i al revés

$a > 1$



$0 < a < 1$

Propietats $a > 0$, $a \neq 1$

(1) $\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$

(2) $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

(3) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(4) $\log_a (x^\alpha) = \alpha \log_a x$

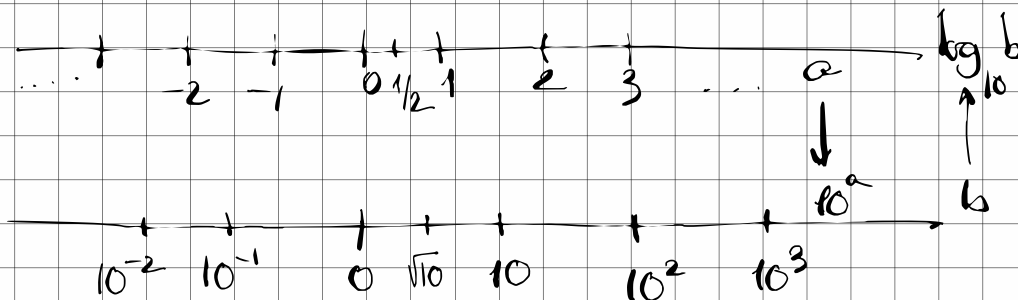
(5) $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x \qquad a, b, x > 0$

[canvi base]

Observació: $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in (0,+\infty)$

$$x^{\alpha} = e^{\alpha \log x}$$

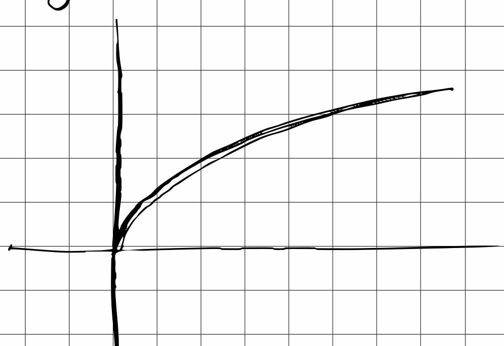
Què és l'escala logarítmica?



escala logarítmica

(només nombres positius)

$y = \sqrt{x}$



escala ordinària

escala logarítmica

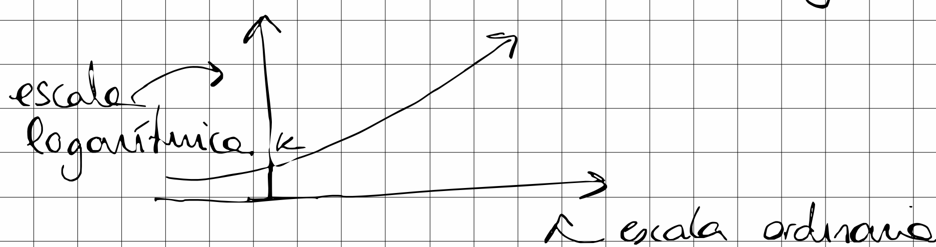
Fixeu-vos

$$y=\sqrt{x}\ ; \quad \log y = \log x^{1/2} = \frac{1}{2}\log x$$

En general, $y=kx^r$ aleshores

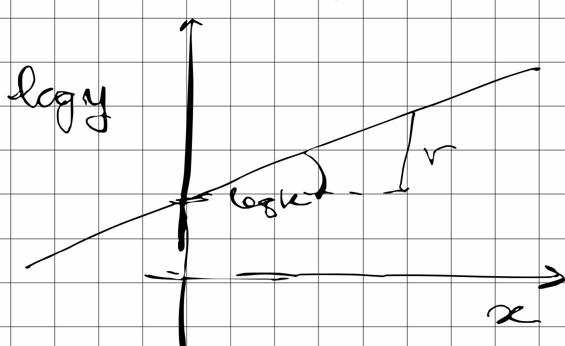
$$\underbrace{\log y}_{Y} = \underbrace{\log k}_{K} + r\cdot\underbrace{\log x}_{X}$$ és una recta

A vegades fem servir escala semilogarítmica.

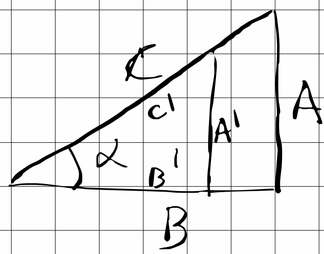


Per exemple, prenem $y = ke^{rx}$

$$\log y = \log k + r \log e^x =$$
$$\log y = \log k + rx$$



(E) Funcions trigonomètriques



$$A^2+B^2=C^2$$

$$\sin(\alpha)=\frac{A}{C}=\frac{A'}{C'}$$

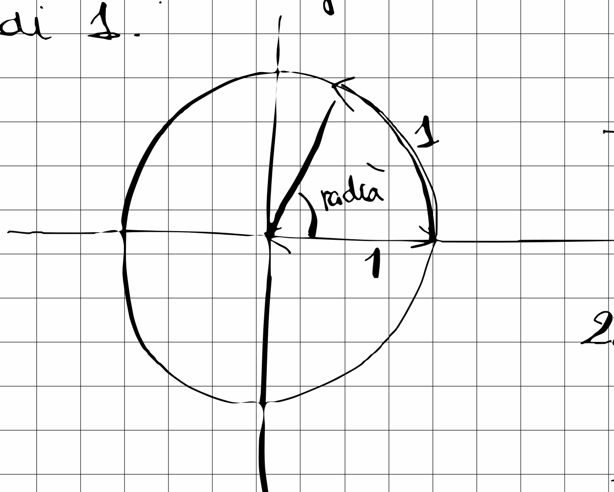
$$tg(\alpha)=\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}$$

$$\cos(\alpha)=\frac{B}{C}=\frac{B'}{C'}$$

$$tg(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Com mesurem els angles? Amb radians

Un radià és la mesura d'un angle corresponent a un arc de longitud 1 en un cercle de radi 1.



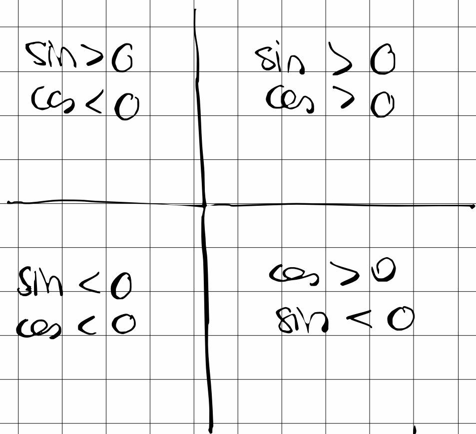
π radians $= 180^\circ$

2π radians $= 360^\circ$

$\pi/2$ radians $= 90^\circ$

Relacions $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

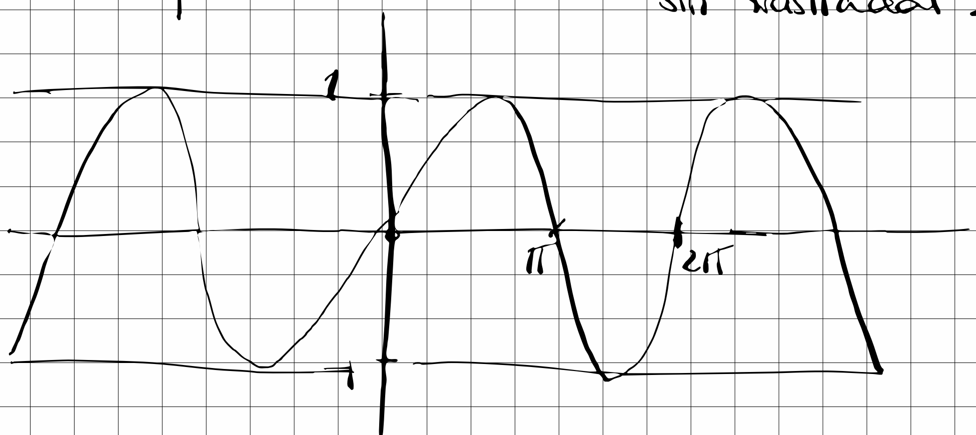
$|\sin(\alpha)| \leq 1 \quad |\cos(\alpha)| \leq 1$

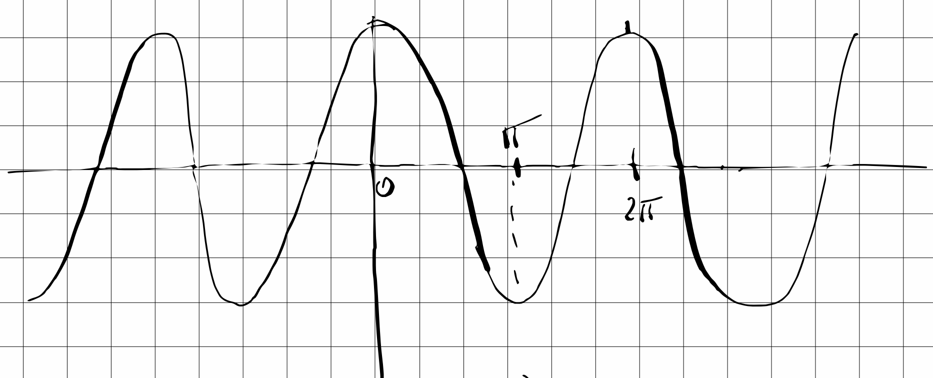


$\sin(x+2\pi) = \sin x$
$\cos(x+2\pi) = \cos x$

$\sin(x+\pi/2) = \cos(x)$

(el cos és el sin traslladat)





SÓN FUNCIONS PERIÒDIQUES

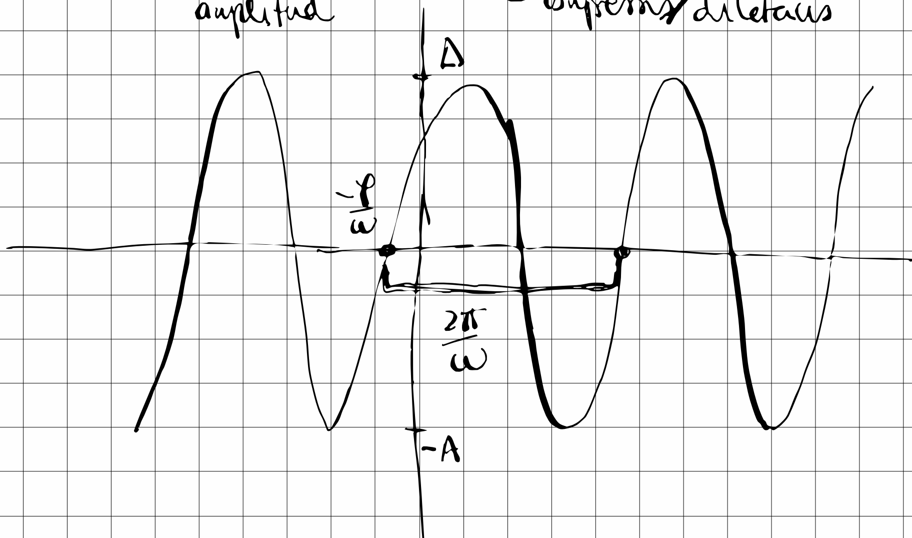
Ara ja sabem dibuixar ones

$$f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$$

traslladar

amplitud

compressió/dilatació

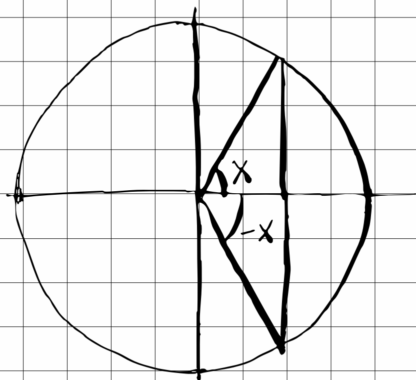


Període $T = \frac{2\pi}{\omega}$ i $f\left(-\frac{\varphi}{\omega}\right) = 0$

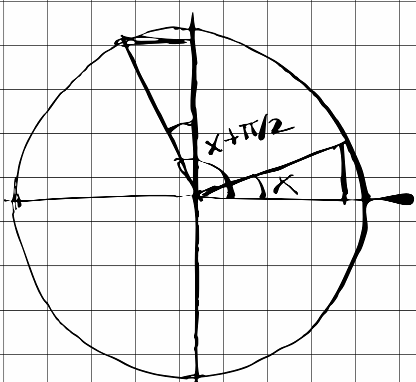
φ desfasament

(i recordeu que $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$)

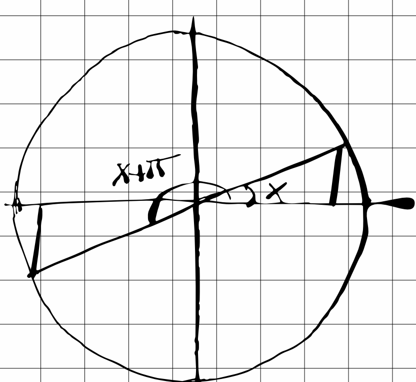
Repassem algunes fórmules per acabar...



$$\cos(-x) = \cos(x)$$
$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

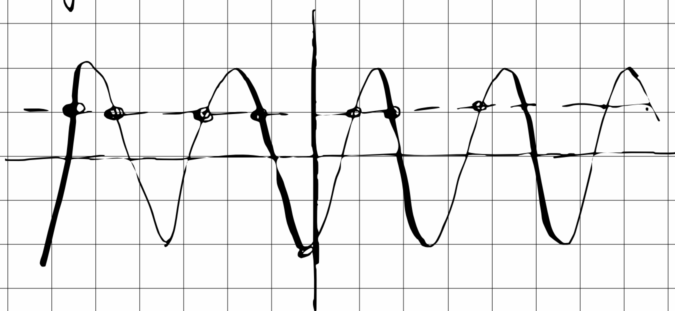


$$\cos(x+\pi/2) = -\sin(x)$$
$$\sin(x+\pi/2) = \cos(x)$$



$$\cos(x+\pi) = -\cos(x)$$
$$\sin(x+\pi) = -\sin(x)$$

Fixeu-vos que tant sin com cos no són injectives i no tenen inversa



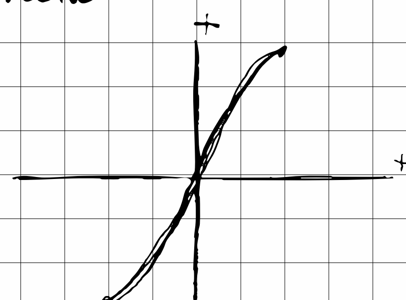
Per poder considerar la inversa, és a dir, quan ens pregunten $\cos(?) = x$

$\sin(?) = x$

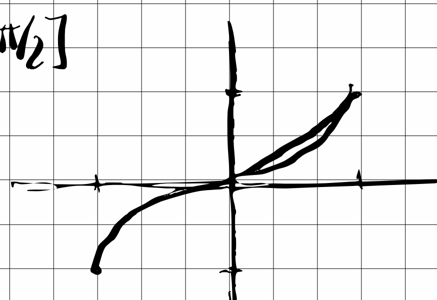
hem de "retallar" la funció i quedar-nos amb un tros del domini

$\sin : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$

és injectiva i la seva inversa és

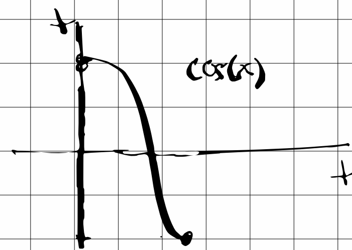


$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$

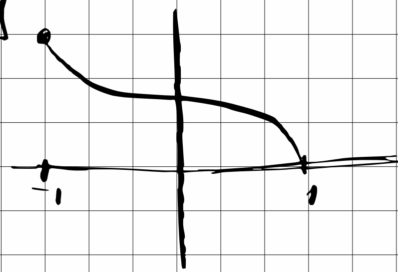


$\cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$

té inversa

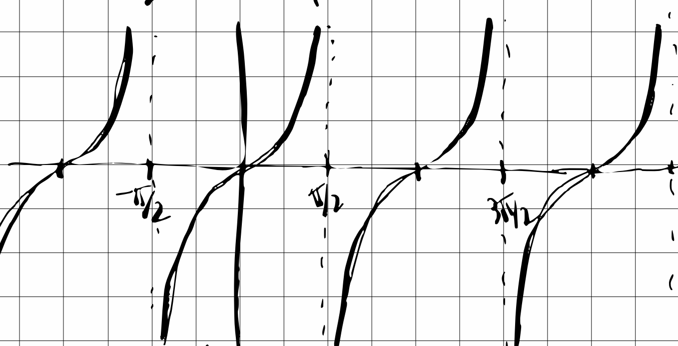


$\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$



Finalment, què passa amb la tangent?
La funció tangent no està definida quan $\cos(x)=0$, és a dir, múltiples senars de $\pi/2$,

$$tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$



És periòdica, no és injectiva ... però si la retallem podem considerar la inversa en un tros del domini

$tg(x) : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$

té inversa

$\operatorname{arctg}(x) : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$