Les protagonistes del curs: les funcions

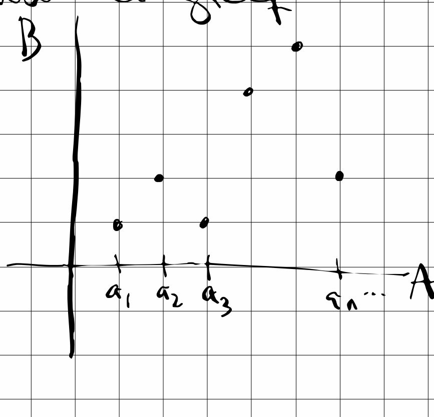
Què és una funció? segurament us esteu imaginant una mena de fórmula que relaciona dues quantitats, per exemple la longitud d'un cercle en funció del radi

$$L = 2\pi \cdot R$$

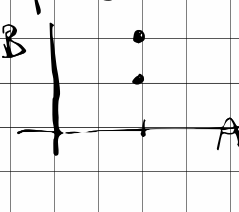
Més formalment, sense pensar en fórmules, una funció és una aplicació entre dos conjunts, una assignació

$$f : A \longrightarrow B$$

de manera que a cada $a \in A$ li correspon un únic $f(a) \in B$. Aleshores tenim parelles $(a, f(a)) \in A \times B$. Així també podem pensar en un subconjunt G dins $A \times B$ de manera que per cada $a \in R$ li hi ha una sola parella $(a, b) \in G \subset A \times B$. Això és el que seria el graf



No pot ser



Estudiarem funcions reals de variable real, és a dir,

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{on } A \subset \mathbb{R}$$

és qualsevol manera d'assignar a cada element $x \in A$ un únic element $f(x) \in \mathbb{R}$.

Diem que $f(x)$ és la imatge de x per f, és essencial que cada $x \in A$ té una única imatge.

Diem que A és el domini de f, $\mathrm{Dom}(f)$.
Per cada $B \subset A$,

$$f(B) = \{ y \in \mathbb{R} \mid \text{existeix } x \in B \ \ f(x) = y \}$$

és la imatge del subconjunt B.

Diem que $f(A)$ és el recorregut de f.

Exemples

(0) $L : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$L(x) =$ longitud d'un cercle de radi $x =$
$= 2\pi x$

(1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2$

(2) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g(x) = \sqrt{|x|}$

(3) $h : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \qquad h(x) = \sqrt{x}$

Però $h': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h'(x) = \sqrt{x}$ no és una funció ja que el domini no és correcte. Hem de redefinir el domini

$$h': [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Quan ens demanen trobar el domini d'una funció, interpretem que ens demanen determinar el conjunt més gran de nombres reals pels qual la fórmula té sentit i ens dona un nombre real.

Pensem en aquestes dues fórmules

(a) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ (b) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$

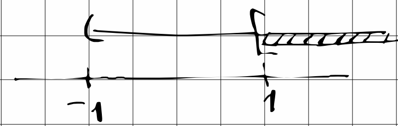
(a) $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$, estudiem el signe d'aquest quocient

	$x-1$	$x+1$	$\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$
$(-\infty, -1)$	$-$	$-$	$+$
-1	$-$	0	no defin.
$(-1, 1)$	$-$	$+$	$-$
1	0	$+$	0
$(1, +\infty)$	$+$	$+$	$+$

$$\boxed{(-\infty, -1) \cup [1, +\infty)}$$

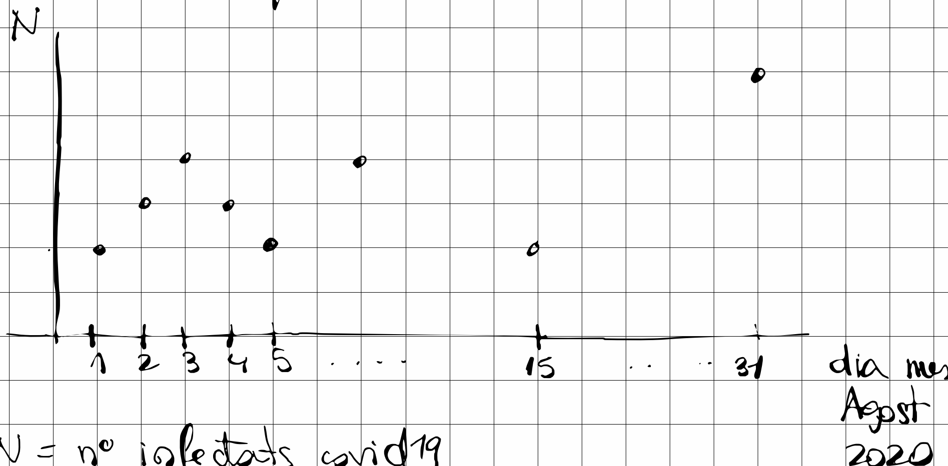
(b) Cal que $x-1 \geq 0$ i $x+1 > 0$
$x+1$ no pot ser zero.

$$\left.\begin{array}{l} x-1\geq 0 \\ x+1>0\end{array}\right\} ; \quad \left.\begin{array}{l} x\geq 1\\ x>-1\end{array}\right\}$$



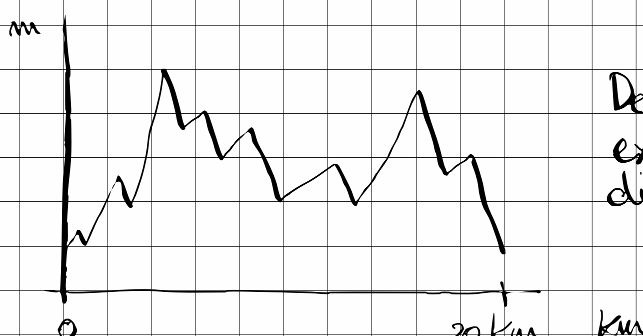
$[1,+\infty)$

..... fixeu-vos que no és el mateix ...



N = nº infectats covid19

És una funció $I:\{1,\dots,31\}\longrightarrow \mathbb{R}$ però no ve donada per una fórmula. O bé

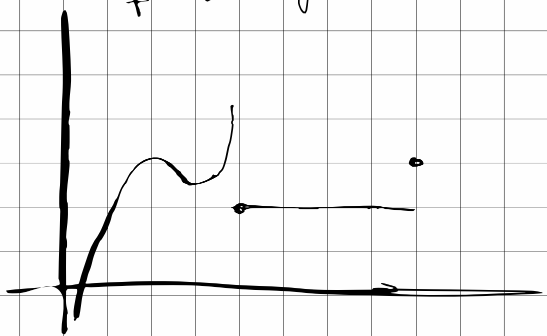


Desnivell en una excursió de diumenge (en bici)

és una funció.

Quan una funció ens ve donada, fem la gràfica on pintem les parelles $(x, f(x))$ en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$$G_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in A,\ y=f(x)\} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$



<u>Transformacions de funcions</u> Anem a parlar una mica de com crear noves funcions a partir de les que tenim

$f,g: A\to\mathbb{R}$, aleshores $f+g: A\to\mathbb{R}$ on $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ o bé $(kf): A\to\mathbb{R}$ amb $(kf)(x) = x$.

Qualsevol operació que podem fer a $\mathbb{R}$ es podrà fer amb una funció... sempre tenint en compte el domini de la funció

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$ sempre i quan $g(x)\neq 0$.

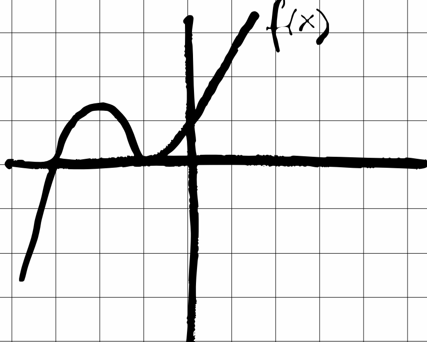
$$(\sqrt{f})(x) = \sqrt{f(x)}$$ sempre i quan $f(x)\geq 0$

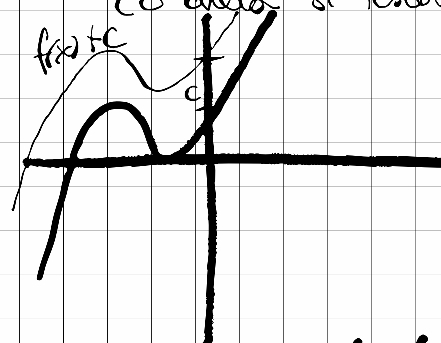
És interessant entendre com certes transformacions modifiquen la gràfica de la funció.

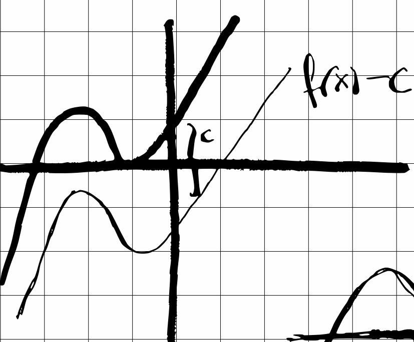
A. DESPLAÇAMENTS. $c>0$, $c \in \mathbb{R}$

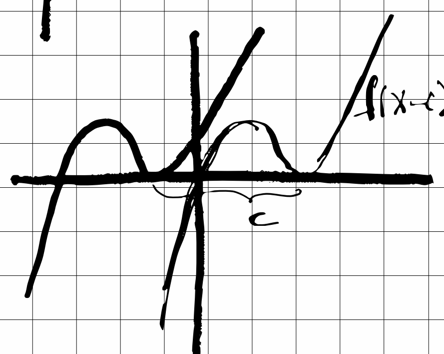
(1) $y = f(x) \pm c$ desplaça c unitats vertical amunt. (o avall quan restem)

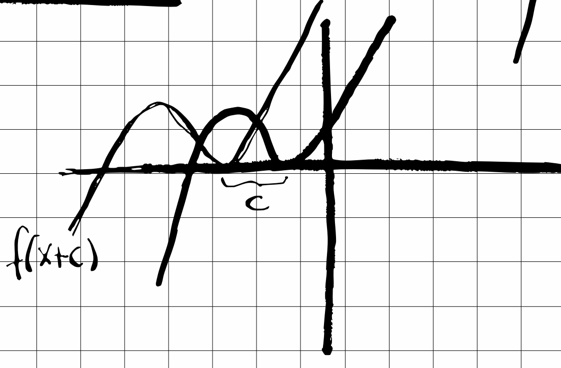
(2) $y = f(x \pm c)$ desplaça c unitats a l'esquerra (o dreta si restem)











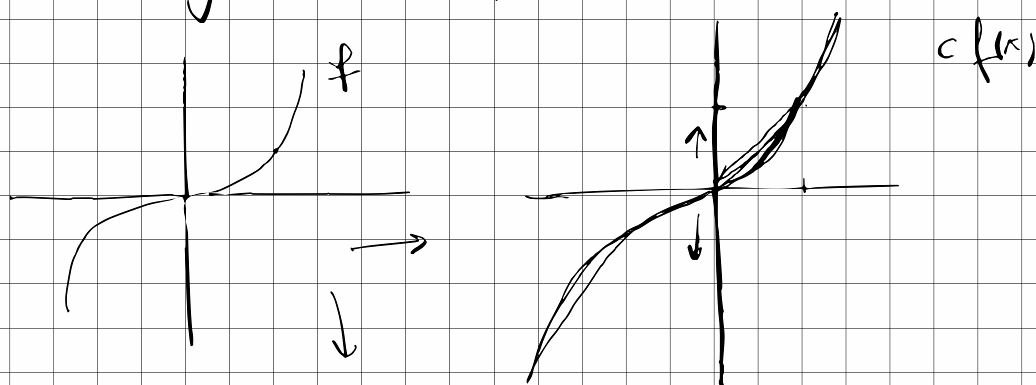
B. Dilatacions i reflexions $c > 1$

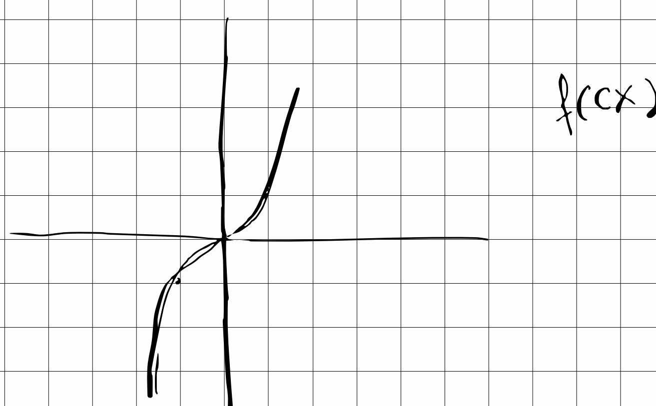
(1) $y = c\,f(x)$ dilata verticalment factor c

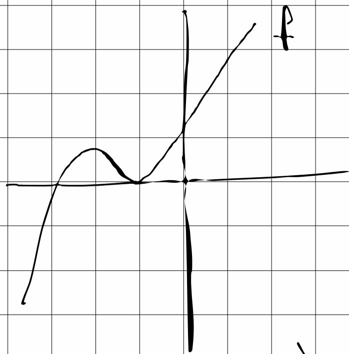
(2) $y = f(cx)$ comprimeix horitzontalment

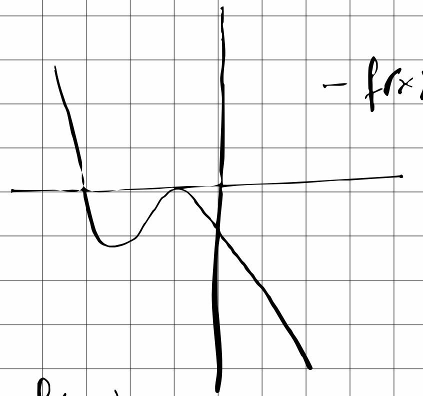
(3) $y = -f(x)$ reflexió en eix OX

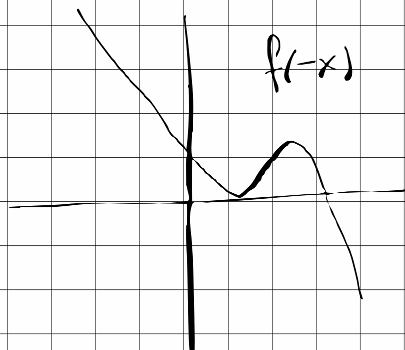
(4) $y = f(-x)$ reflexió en eix OY.





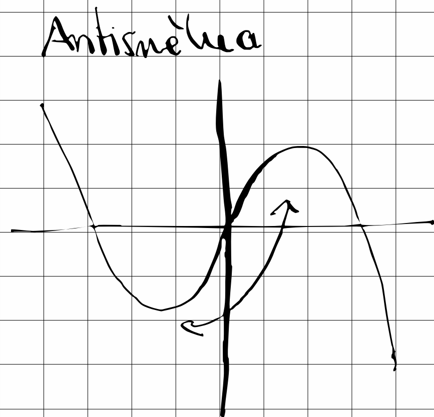






Diem que f és parella si $f(x) = f(-x)$ per tot x i diem que f és senar si $f(-x) = -f(x)$ per tot x.

També es diuen simètrica i antisimètrica. Fixeu-vos que les seves gràfiques presenten simetries



Acabem amb una nova manera de construir funcions: per composició

COMPOSICIÓ DE FUNCIONS

Donades dues funcions $f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$ de manera que

$$f(A) \subset B$$

aleshores les podem 'encadenar' una darrera l'altra

$$x \in A \longrightarrow \boxed{\;f\;} \longrightarrow f(x) \in B \longrightarrow \boxed{\;g\;} \longrightarrow g(f(x))$$

La composició de f amb g és

$$(g \circ f): A \longrightarrow \mathbb{R} \text{ definida com}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Fixeu-vos que en general $g \circ f \neq f \circ g$. Per exemple,

$f(x) = \sqrt{x}$ $\qquad g \circ f: [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(x) = x + 1$ $\qquad f \circ g: \underbrace{\{x \in \mathbb{R} \mid x+1 \geq 0\}}_{= [-1, +\infty)} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(x+1) = \sqrt{x+1}$$

Igual que en podem composar dues, es pot fer amb més i la composició és associativa

$$(f\circ g)\circ h = f\circ (g\circ h)$$

(sempre i quan les composicions tinguin sentit)

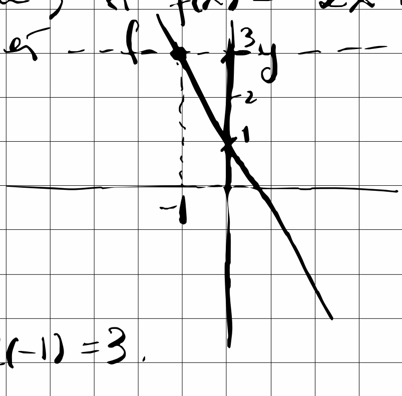
$f(x)=x^2$
$g(x)=x+4$
$h(x)=-x^3$

$$(h\circ g\circ f)(x) = h(g\circ f(x)) =$$
$$= h(g(f(x))) =$$
$$= h(g(x^2)) = h(x^2+4) = -(x^2+4)^3$$

Aprofitem per parlar de la funció inversa:

una funció f és una manera d'assignar valors $x \rightsquigarrow f(x)$. La pregunta és donat un valor de la imatge, podem recuperar de qui és imatge? Donat un f(x), sabem qui és x?

Per exemple, si $f(x)=-2x+1$ alehores la gràfica és

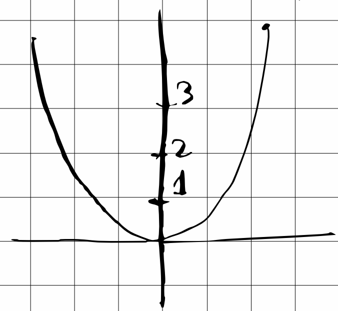


donat $y\in\mathbb{R}$, sabem que hi ha una única parella (x,y) a la gràfica.

Eg. $y=3$,
$f(-1)=3$.

Alehores per aquest x, $f(x)=y$.

Ara bé si prenem $f(x)=x^2$



Per cada $y>0$ hi ha dos valors de x tals que (x,y) és a la gràfica

E.g. $f(\sqrt{3})=3$

$f(-\sqrt{3})=3$

En el primer cas puc definir la funció inversa com l'elecció d'x per la qual $f(x)=y$

$$-2x+1=y \;;\quad x=\frac{y-1}{-2}$$

I escrivim $f^{-1}(x)$. En l'exemple $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{-2}$

Fixeu-vos que $(f\circ f^{-1})(x)=f\left(\frac{x-1}{-2}\right)=$

$$=-2\left(\frac{x-1}{-2}\right)+1=x-1+1=x$$

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(-2x+1)=$$

$$=\frac{-2x+1-1}{-2}=\frac{-2x}{-2}=x$$

La funció inversa compleix $(f\circ f^{-1})(x)=x$

$(f^{-1}\circ f)(x)=x$.

No totes les funcions tenen funció inversa per a tenir-la cal que es compleixi la següent condició

Definició $f: A \to \mathbb{R}$ és injectiva si sempre que $f(x_1) = f(x_2)$ aleshores $x_1 = x_2$.

(és a dir, si $x_1 \neq x_2$ aleshores $f(x_1) \neq f(x_2)$)

I encara que f tingui inversa, no és fàcil de trobar.

Exemples

(1) $f: [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ aleshores $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

En general, si $f(x) = x^n$ aleshores $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ i el domini de f^{-1} és $\mathbb{R}$ si n senar i $[0, +\infty)$ si n parell.

(2) Sigui $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Suposem que tenim $y \in \mathbb{R}$, és $y = f(x)$? anem a aïllar x.

$$\frac{x}{x^2+1} = y \; ; \quad x = y(x^2+1)$$

$$x = yx^2 + y, \quad yx^2 - x + y = 0$$

Fixeu-vos que és un polinomi de grau 2 en x ja que y és fixada.

$$yx^2-x+y=0$$

Per tant,

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4y^2}}{2y}$$

Així tenim que si $1-4y^2>0$ aleshores no hi ha un únic x tal que $f(x)=y$. N'hi ha dos, aleshores no és injectiva, no té inversa.

<u>Pregunta</u> $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ té alguna simetria?

(3) $g(x)=2x^3-5$. Suposem $y=g(x)$, aleshores

$$y=2x^3-5$$

$$2x^3=y+5\ ,\quad x=\sqrt[3]{\frac{y+5}{2}}$$

Per tant, g sí té inversa ja que hi ha un sol valor de x tal que $g(x)=y$

$$g^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{x+5}{2}}$$

Fixeu-vos $g(g^{-1}(x))=g\left(\sqrt[3]{\frac{x+5}{2}}\right)=$

$$=2\left(\sqrt[3]{\frac{x+5}{2}}\right)^3-5=$$

$$=2\left(\frac{x+5}{2}\right)-5=x+5-5=x,$$

i $g^{-1}(g(x))=g^{-1}(2x^3-5)=$

$$=\sqrt[3]{\frac{2x^3-5+5}{2}}=\sqrt[3]{x^3}=x.$$