Benvinguts al curs de càlcul!

2020/21

Anem a pensar una mica...

- Un monjo tibetà deixa el seu monasteri a les 5 del matí i arriba al cim d'una muntanya a les 5 de la tarda. Medita tota la nit i l'endemà fa el camí de tornada sortint a les 5 del matí i a les 5 de la tarda ja es al monasteri.

Anem a pensar una mica...

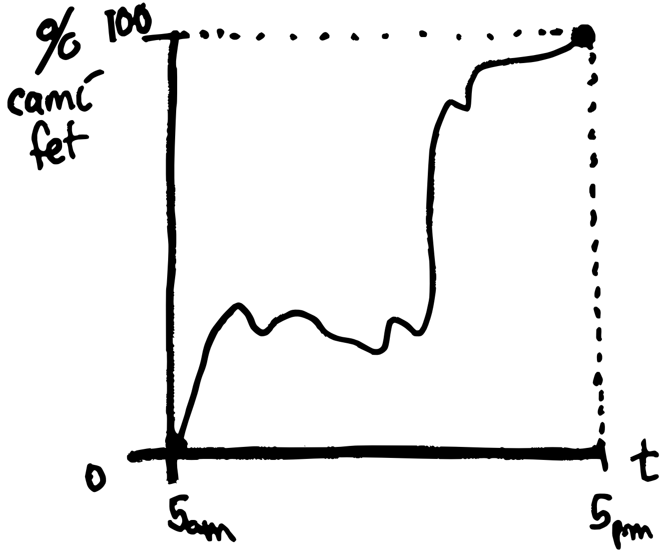
- Un monjo tibetà deixa el seu monestir a les 5 del matí i arriba al cim d'una muntanya a les 5 de la tarda. Medita ~~tota~~ la nit i l'endemà fa el camí de tornada sortint a les 5 del matí i a les 5 de la tarda ja és al monestir.

Hi ha un punt del camí que el monjo ha creuat els dos dies exactament al mateix temps.

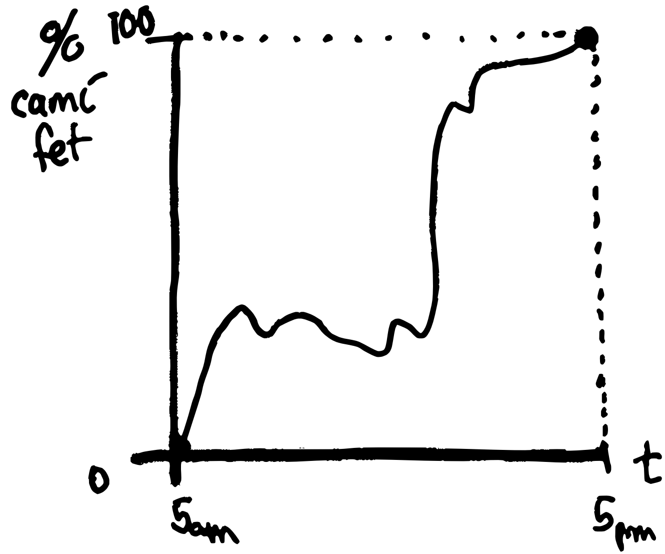
Anem a pensar una mica...

- Un monjo tibetà deixa el seu monasteri a les 5 del matí i arriba al cim d'una muntanya a les 5 de la tarda. Medita ~~tota~~ la nit i l'endemà fa el camí de tornada sortint a les 5 del matí i a les 5 de la tarda ja és al monasteri.

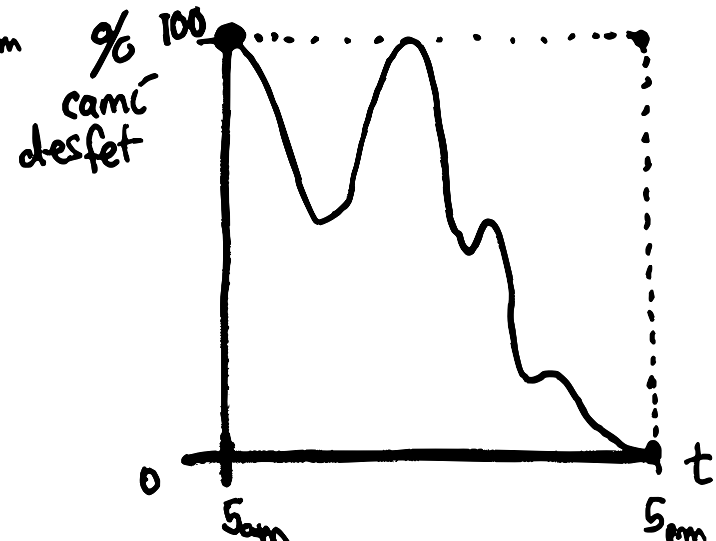
Hi ha un punt del camí que el monjo ha creuat els dos dies exactament al mateix temps. CERT O FALS?



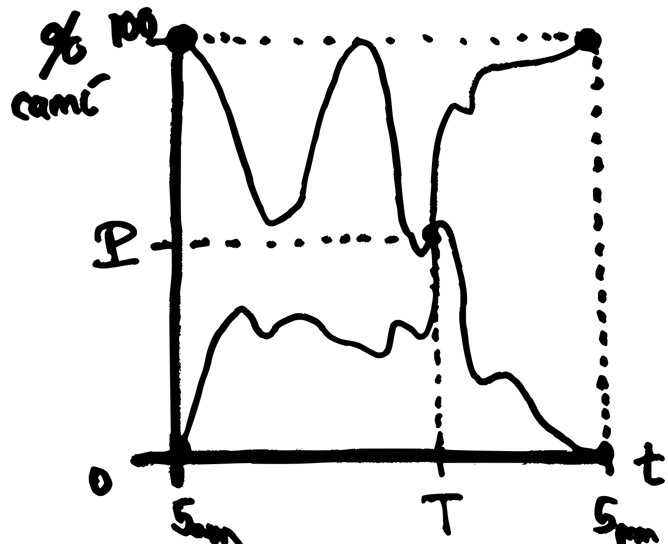
%
camí
fet
100
0
5am
5pm
t



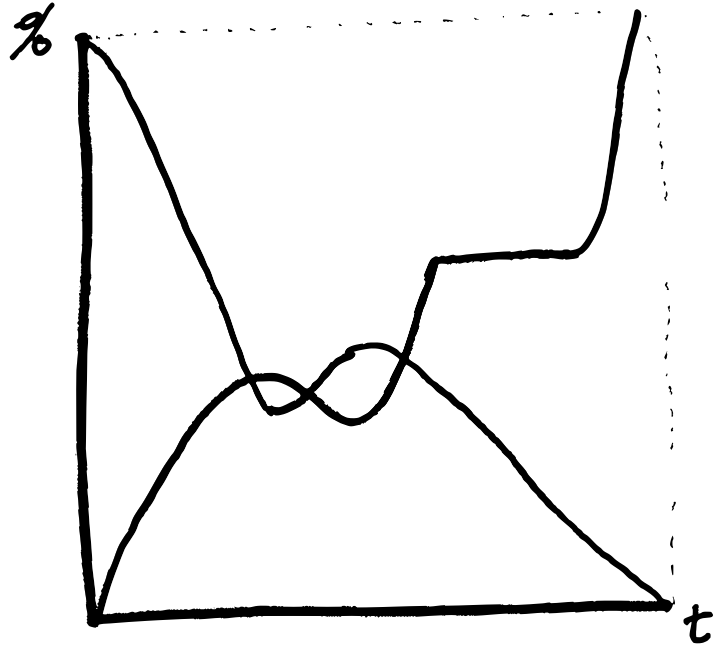
% camí fet
100
0
5am
5pm
t



% camí desfet
100
0
5am
5pm
t



Què passa a l'instant T?



Pot passar més d'una vegada?

Un altre :

Agafem una corda i la passem al voltant de l'equador del planeta (diàmetre = 12.742 km)

Un cop està ben ajustada, afegim 1 metre a la corda de manera que ara es separa una mica de la superfície.

Un altre :

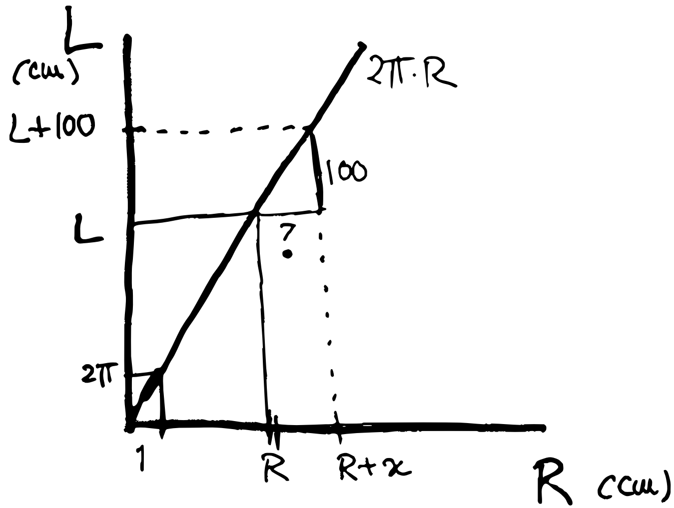
Agafem una corda i la passem al voltant de l'equador del planeta (diàmetre = 12.742 km)

Un cop està ben ajustada, afegim 1 metre a la corda de manera que ara es separa una mica de la superfície.

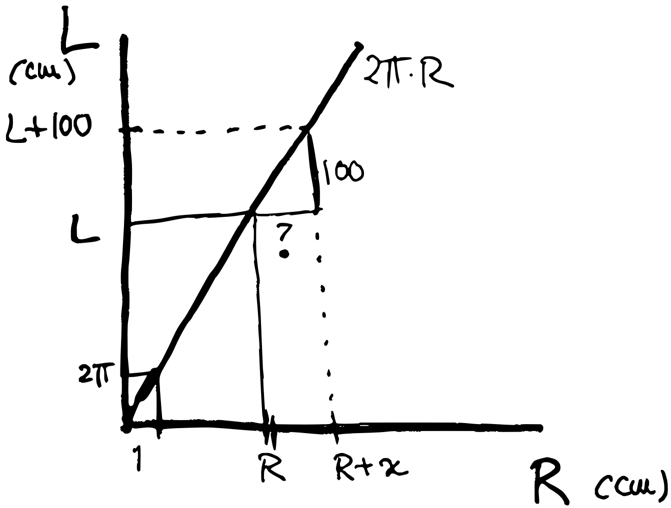
És separa

(A) més de 15 cm (B) menys de 15 cm

Sabem $L = 2\pi \cdot R$,



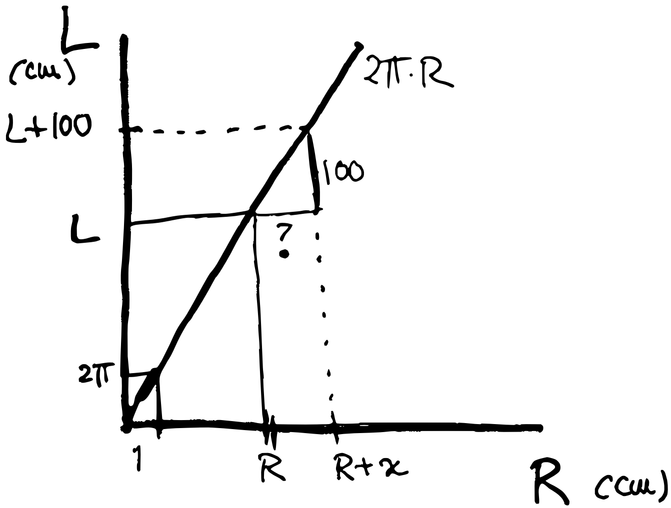
Sabem $L = 2\pi \cdot R$,



$$L_{Terra} = 2\pi \cdot R_{Terra}$$

$$\left(L_{Terra} + 100\right) = 2\pi\left(R_{Terra} + x\right)$$

Sabem $L = 2\pi \cdot R$,



$$L_{Terra} = 2\pi \cdot R_{Terra}$$

$$\left(L_{Terra} + 100\right) = 2\pi\left(R_{Terra} + x\right)$$

$$100 = 2\pi \cdot x$$

$$x = \frac{100}{2\pi} \approx 16 \text{ cm}$$

Quines són les eines bàsiques del càlcul?

- Els nombres
- Les funcions

Primer una mica de llenguatge :

- Què és un conjunt? És una col·lecció d'objectes ben definida.

$A = \{$ Estudiant de primer de càlcul a GEA matriculat $\}$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

$C = \{ n$ és un nombre natural senar $\}$

Primer una mica de llenguatge:

- Què és un conjunt? És una col·lecció d'objectes ben definida.

$A = \{$ Estudiant de primer de càlcul a GEA matriculat $\}$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

$C = \{ n$ és un nombre natural senar $\}$

Però $\{ n$ tal que n és interessant $\}$ no ho és!

Primer una mica de llenguatge :

- Què és un conjunt ? És una col·lecció d'objectes ben definida.

$A = \{$ Estudiant de primer de càlcul a GEA matriculat $\}$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

$C = \{$ n és un nombre natural senar $\}$

- $x \in A$, x pertany a A
- $A \subset B$, si x pertany a A alehores també pertany a B
- $\emptyset$, conjunt buit
- $A \cup B = \{x$ tals que $x \in A$ o $x \in B\}$
- $A \cap B = \{x$ tals que $x \in A$ i $x \in B\}$

Quins són els conjunts de números que farem servir?

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\mathbb{N}$ = nombres naturals = $\{1, 2, 3, \dots\}$

- serveixen per comptar unitats
  $1, \; 1+1, \; 1+1+1, \; 1+1+1+1, \; \dots$
- $n \in \mathbb{N}$ aleshores $n+1 \in \mathbb{N}$
- estant ordenats $n < n+1$
- podem sumar-los o multiplicar-los
  $n+m, \; n \cdot m \in \mathbb{N}$

Què passa amb el zero?

Quins són els conjunts de números que farem servir?

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$\mathbb{Z}$ = nombres enters, s'introdueix el ¿zero? i els nombres negatius

Si $n, m \in \mathbb{N}$ i volem una solució de

$$n + x = m,$$

ens calen els nombres negatius!

$$x = m - n$$

Estan ordenats, $\ldots -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < \ldots$

i es sumen, i multipliquen.

Quins són els conjunts de números que farem servir?

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$\mathbb{Q}$ = nombres racionals, ens permeten treballar amb proporcions.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \text{ ; } p, q \in \mathbb{Z} \right\}$$

Si $p, q \in \mathbb{Z}$ aleshores tenim solucions de les

$$q = p \cdot x$$

Quins són els conjunts de números que farem servir?

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \text{ on } p, q \in \mathbb{Z} \quad ; \quad \frac{p \cdot a}{q \cdot a} = \frac{p}{q} \right\}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd} \quad ; \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad ;$$

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \quad ; \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ si } \frac{ad}{bd} < \frac{bc}{bd} \text{ si } ad < bc$$

Quins són els conjunts de números que farem servir?

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Si només tinc $\mathbb{Q}$, puc resoldre $x^2 = 2$?

- Sigui $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{p^2}{q^2} = 2$, $2q^2 = p^2$, $\text{mcd}(p,q) = 1$

Per tant, p^2 és parell, això només és possible si p és parell, i aleshores p^2 és divisible per 4.

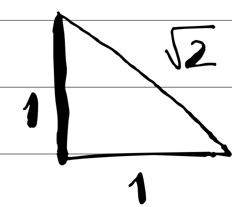
Així $2q^2$ és divisible per 4, aleshores q^2 és divisible per 2 i q ha de ser parell... això no pot ser! $\text{mcd}(p,q) = 1$.

Quins són els conjunts de números que farem servir?

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Si només tinc $\mathbb{Q}$, puc resoldre $x^2 = 2$?

- Com construïm $\sqrt{2}$?



(Pitàgores)

- Els nombres reals $\mathbb{R}$ els expressem amb forma decimal, és a dir, potències de 10. Com distingim $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$? tenen expressió decimal finita o periòdica.

- Altres & π, e, $\sqrt{3}$, ...

Exemple

$$1'2345 = \frac{12345}{10.000}$$

Exemple

$$1'2345 = \frac{12345}{10.000}$$

$$1'23\overparen{45} \qquad x = 1'23\overparen{45}$$

$$\begin{array}{rl} 10000x = & 12345'\overparen{45} \\ - \quad 100x = & 123'\overparen{45} \\ \hline 9900x = & 12222 \end{array}$$

$$x = \frac{12222}{9900} \checkmark$$

Exemple

$$1'2345 = \frac{12345}{10.000}$$

$1'23\widehat{45}$ $\qquad x = 1'23\widehat{45}$

$$\begin{array}{rrl} & 10000x = & 12345'\widehat{45} \\ - & 100x = & 123'\widehat{45} \\ \hline & 9900x = & 12222 \end{array}$$

$$x = \frac{12222}{9900} \checkmark$$

$0'\widehat{9}$

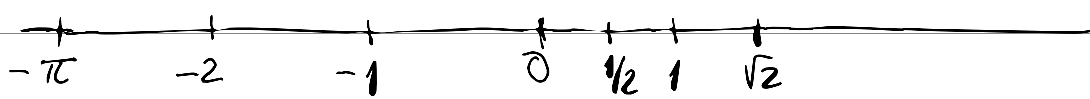
$$\begin{array}{rrl} & 10x = & 9'\widehat{9} \\ - & x = & 0'\widehat{9} \\ \hline & 9x = & 9 \end{array}$$

$x = 1 \qquad 0'\widehat{9} = 1$

Quins són els conjunts de números que farem servir?

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Els nombres reals es representen en una recta, on estan ordenats.



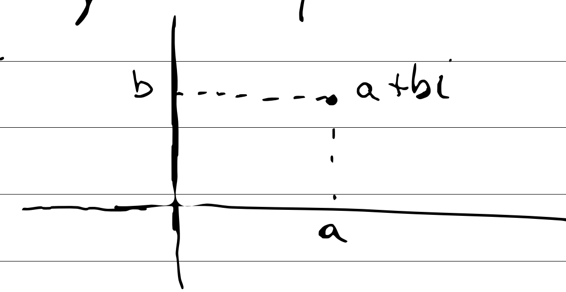
Quins són els conjunts de números que farem servir?

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Per últim, l'equació $x^2=-1$ no té solució en els nombres $\mathbb{R}$. Aleshores introduïm i tal que $i^2=-1$, el número imaginari.

$$\mathbb{C} = \{a+bi \text{ on } a,b\in\mathbb{R}\}$$

Permeten doncs resoldre equacions polinomials i es representen al pla



Ens quedem a $\mathbb{R}$. Com és la relació d'ordre?

$a < b$ sii $b - a > 0$ (b és a la dreta de a a la recta real)

$a \leq b$ sii $a < b$ o $a = b$

Ens quedem a $\mathbb{R}$. Com és la relació d'ordre?

$a < b$ sii $b - a > 0$ (b és a la dreta de a a la recta real)

$a \leq b$ sii $a < b$ o $a = b$

$\mathbb{R}$ està ben ordenat i es verifica: $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

1. $a < b$ ó $a = b$ ó $a > b$
2. $a \leq b$ i $b \leq c$ aleshores $a \leq c$

Ens quedem a $\mathbb{R}$. Com és la relació d'ordre?

$a < b$ sii $b - a > 0$ (b és a la dreta de a a la recta real)

$a \leq b$ sii $a < b$ o $a = b$

$\mathbb{R}$ està ben ordenat i es verifica: $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

1. $a < b$ ó $a = b$ ó $a > b$
2. $a \leq b$ i $b \leq c$ aleshores $a \leq c$
3. $a \leq b$ aleshores $a + c \leq b + c$
4. $a \leq b$, $c > 0$ aleshores $ac \leq bc$
5. $a \leq b$, $c < 0$ aleshores $ac \geq bc$

Atenció

Fixeu-vos :

$a \le b$ vol dir $b-a \ge 0$

Aleshores $c(b-a) \ge 0$ si $c>0$, $cb \ge ca$

$c(b-a) \le 0$ si $c<0$, $cb \le ca$

Fixeu-vos:

$a \leq b$ vol dir $b - a \geq 0$

Aleshores $c(b-a) \geq 0$ si $c > 0$, $cb \geq ca$

$c(b-a) \leq 0$ si $c < 0$, $cb \leq ca$

<u>Pregunta</u> És cert que si $a < b$ aleshores $a^2 < b^2$?

i $a < b$, $c < d$ aleshores $ac < bd$?

Els intervals ... els escrivim com

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \text{ i } x \leq b\} = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

$$(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

La funció valor absolut

$|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$

$|2| = 2$, $\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$, $|0| = 0$.

Entenem $|a-b|$ com la distància entre a i $b \in \mathbb{R}$

$|a| \geq 0$

$|a| = 0$ sii $a = 0$

$|a| = \max\{a, -a\}$

$|ab| = |a||b|$

$|a+b| \leq |a| + |b|$ (desigualtat triangular)

$\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$

$a^2 = |a|^2 = |a^2|$

La funció valor absolut

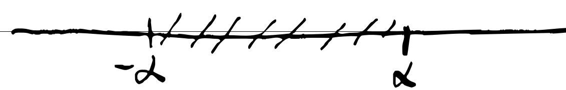
$|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$

$|2| = 2$, $\left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$, $|0| = 0$.

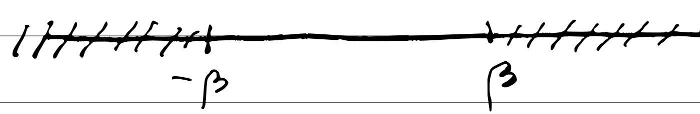
Entenem $|a-b|$ com la distància entre a i $b \in \mathbb{R}$

Què vol dir $|a| \leq \alpha$? $\quad a \in [-\alpha, \alpha]$

$-\alpha \leq a \leq \alpha$



Què vol dir $|b| \geq \beta$? $\quad b \geq \beta$ ó $b \leq -\beta$



Exercici: Anem a resoldre $1-2x=0$

$1-2x=0$, $1-2x+x^2=x^2$, $(x-1)^2=x^2$,
Per tant $x-1=x$, $-1=0$!! NO TÉ SOLUCIÓ!

__Exercici__: Anem a resoldre $1-2x=0$

$1-2x=0$, $1-2x+x^2=x^2$, $(x-1)^2=x^2$,
Per tant $x-1=x$, $-1=0$!! NO TÉ SOLUCIÓ!

Però $x=\frac{1}{2}$ és solució.

On és l'error?

__Exercici__: Anem a resoldre $1-2x=0$

$1-2x=0$, $1-2x+x^2=x^2$, $(x-1)^2=x^2$,
Per tant $x-1=x$, $-1=0$!! NO TÉ SOLUCIÓ!

Però $x=\frac{1}{2}$ és solució.

On és l'error?

Recordeu $\sqrt{a^2}=|a|$, per tant

$|x-1|=|x|$, $x-1=x$; $-1=0$
$x-1=-x$; $2x-1=0$
$x=1/2$

Anem a resoldre uns exemples.

(A) $3x-1<-5$, aïllem x amb compte!

$3x<-4$

$x<-4/3$ $\quad (-\infty,-4/3)$

$-2x+3\leq 4$

$-2x\leq 1$,

$2x\geq -1$, $x\geq -1/2$ $\quad [-1/2,+\infty)$

(B) Sempre mirem de reduir a $P(x) \leq 0$ ó $P(x) \geq 0$

$x^3 + 4x^2 \leq -3x$

$x^3 + 4x^2 + 3x \leq 0$ i ara estudiem els signes que pren el polinomi

$P(x) = x^3 + 4x^2 + 3x = x(x^2 + 4x + 3)$

(B) Sempre mirem de reduir a $P(x) \leq 0$ ó
$P(x) \geq 0$

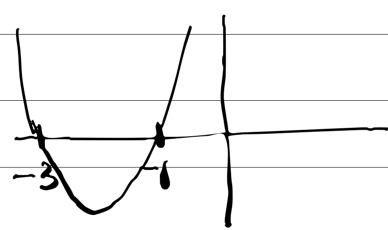
$x^3 + 4x^2 \leq -3x$

$x^3 + 4x^2 + 3x \leq 0$ i ara estudiem els signes que pren el polinomi

$P(x) = x^3 + 4x^2 + 3x = x(x^2 + 4x + 3)$

Fixeu-vos que $x^2 + 4x + 3$ és una paràbola

$x^2 + 4x + 3 = 0 \qquad x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \begin{cases} -3 \\ -1 \end{cases}$



$x^2 + 4x + 3 \geq 0 \qquad (-\infty, -3] \cup [-1, +\infty)$

$x^2 + 4x + 3 \leq 0 \qquad [-3, -1]$

(B) Sempre mirem de reduir a $P(x) \leq 0$ ó $P(x) \geq 0$

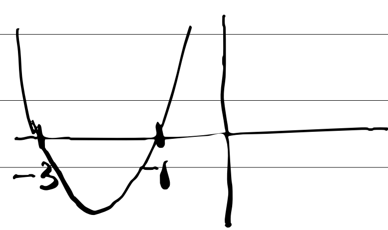
$x^3 + 4x^2 \leq -3x$

$x^3 + 4x^2 + 3x \leq 0$ i ara estudiem els signes que pren el polinomi

$P(x) = x^3 + 4x^2 + 3x = x(x^2 + 4x + 3)$

Fixeu-vos que $x^2 + 4x + 3$ és una paràbola

$x^2 + 4x + 3 = 0 \qquad x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \begin{cases} -3 \\ -1 \end{cases}$



$x^2 + 4x + 3 \geq 0 \quad (-\infty, -3] \cup [-1, +\infty)$

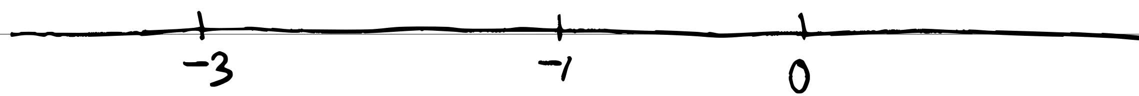
$x^2 + 4x + 3 \leq 0 \quad [-3, -1]$

$$x^3+4x^2 \le -3x$$

$$x(x+1)(x+3)$$

$$x^3+4x^2+3x \le 0\,, \quad x(x^2+4x+3) \le 0$$

Fixeu-vos $x(x^2+4x+3)=0$ si $x=0$, $x=-3$, $x=-1$



	x	$x+3$	$x+1$	$x(x+3)(x+1)$
$(-\infty,-3)$	$-$	$-$	$-$	$-$
-3	$-$	0	$-$	0
$(-3,-1)$	$-$	$+$	$-$	$+$
-1	$-$	$+$	0	0
$(-1,0)$	$-$	$+$	$+$	$-$
0	0	$+$	$+$	0
$(0,+\infty)$	$+$	$+$	$+$	$+$

Solució

$(-\infty,-3] \cup [-1,0]$