

Cal que les respostes a tots els exercicis estiguin ben justificades. Es valora positivament la claredat d'exposició. Feu servir fulls diferents per problemes diferents. Recordeu que heu de posar el vostre nom i NIU a cada full que lliureu.

1. [1 punt] Resoleu la següent inequació:

$$\frac{3x-1}{x-1} + \frac{2}{x} > 3.$$

2. [1 punt] Resoleu les equacions següents:

$$(a) \quad 3^{x-1} + 3^{x+1} = 64 - 2 \cdot 3^{x+1}, \quad (b) \quad \log_3(x^2 + 20) = 2 + \log_3(x).$$

3. [2 punts] Calculeu els següents límits:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 1})^3, \quad (b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

4. [3 punts] Sigui $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{2-x}\right)$.

1. Feu un estudi del domini, continuïtat i les assíptotes de la funció $f(x)$.
2. Calculeu $f^{-1}(x)$ i comproveu que $(f \circ f^{-1})(x) = x$.

5. [3 punts] Sigui $f(x) = x^3 - 4x + 2$.

1. Per quins valors de $C \in \mathbb{R}$, la recta $y = 8x + C$ és tangent a la gràfica de f ?
2. Hi ha alguna recta que sigui perpendicular a $y = 8x + 1$ i tangent a la gràfica de f ?
3. Comproveu que l'equació $x^3 - 4x + 2 = 0$ té tres solucions diferents a l'interval $(-3, 3)$.

$$\textcircled{1} \quad \frac{3x-1}{x-1} + \frac{2}{x} > 3$$

Primer passem tots els factors / summands a un costat.

$$\frac{3x-1}{x-1} + \frac{2}{x} - 3 > 0 ; \quad \frac{(3x-1)x + 2(x-1) - 3x(x-1)}{x(x-1)} > 0$$

$$\frac{3x^2 - x + 2x - 2 - 3x^2 + 3x}{x(x-1)} > 0$$

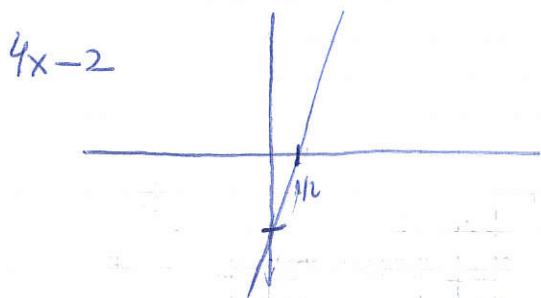
$$\frac{4x-2}{x(x-1)} > 0$$

Ara analitzem els signes de tots els factors que apareixen buscant els punts on s'anul·len, $x = 1/2$, $x = 0$, $x = 1$

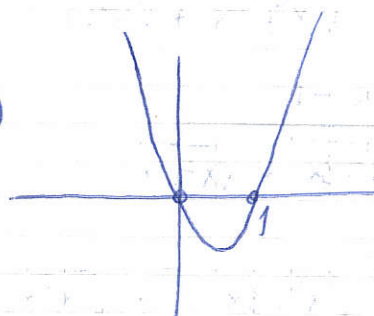
	$4x-2$	x	$x-1$	$\frac{4x-2}{x(x-1)}$
$(-\infty, 0)$	-	-	-	-
$(0, 1/2)$	-	+	-	+
$(1/2, 1)$	+	+	-	-
$(1, +\infty)$	+	+	+	+

SOLUCIÓ

$$(0, 1/2) \cup (1, +\infty)$$



$x(x-1)$



$$\textcircled{2} \quad (a) \quad 3^{x-1} + 3^{x+1} = 64 - 2 \cdot 3^{x+1}$$

$$\frac{3^x}{3} + 3 \cdot 3^x = 64 - 2 \cdot 3 \cdot 3^x$$

$$3^x \left(\frac{1}{3} + 3 + 6 \right) = 64 ; \quad 3^x \frac{28}{3} = 64 ; \quad 3^x = \frac{64 \cdot 3}{28} = \frac{48}{7}$$

$$x = \log_3 \left(\frac{48}{7} \right)$$

$$(b) \log_3(x^2+20) = 2 + \log_3(x)$$

$$\log_3(x^2+20) - \log_3(x) = 2$$

$$\log_3\left(\frac{x^2+20}{x}\right) = 2; \quad \frac{x^2+20}{x} = 3^2$$

$$x^2+20=9x; \quad x^2-9x+20=0$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81-80}}{2} = \frac{9 \pm 1}{2} = \begin{cases} 5 \\ 4 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{matrix} x=5 \\ x=4 \end{matrix}}$$

~~comprova~~

(3) (a)

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+1})^3$ é uma indeterminação $\infty - \infty$.

$$\frac{(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+1}) \cdot (\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+1}} = \frac{(x^2+3x) - (x^2+1)}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+1})^3 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+1}} \right)^3 =$$

$$= \left(\frac{3}{2} \right)^3 = \boxed{\frac{27}{8}}$$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$, sabemos $-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 1$

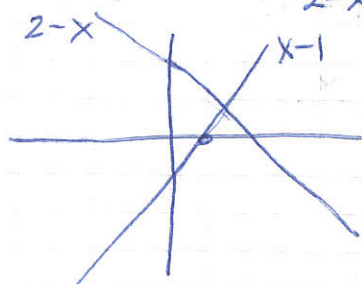
$$-x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq x^2$$

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = \boxed{0}$

④ $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{2-x}\right)$

1. Domini = $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-1}{2-x} > 0\}$. Hem de resoldre $\frac{x-1}{2-x} > 0$



	$x-1$	$2-x$	
$(-\infty, 1)$	-	+	-
$(1, 2)$	+	+	+
$(2, +\infty)$	+	-	-

Aleshores $\boxed{\text{domini}(f) = (1, 2)}$. Com que $\frac{x-1}{2-x}$ és contínua en el domini i \ln és contínua, aleshores $f(x)$ és contínua en el seu domini $(1, 2)$.

Assíptotes verticals : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x-1}{2-x}\right) = \ln(0^+) = -\infty$ $\boxed{x=1}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \ln\left(\frac{x-1}{2-x}\right) = \ln(+\infty) = +\infty \quad \boxed{x=2}$$

No hi ha assíptotes horitzontals ja que el domini és $(1, 2)$ i no té sentit considerar $x \rightarrow \pm\infty$.

2. $y = \ln\left(\frac{x-1}{2-x}\right)$; aïllem x en funció de y .

$$e^y = \frac{x-1}{2-x} \quad ; \quad e^y(2-x) = x-1 \quad ; \quad 2e^y - e^y x = x-1$$
$$2e^y + 1 = e^y x + x \quad ; \quad 2e^y + 1 = x(e^y + 1)$$
$$\frac{2e^y + 1}{e^y + 1} = x$$

Aleshores $f^{-1}(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x + 1}$

Comprovem $(f \circ f^*)(x) = x$

$$f\left(\frac{2e^x+1}{e^x+1}\right) = \ln\left(\frac{\frac{2e^x+1}{e^x+1} - 1}{2 - \frac{2e^x+1}{e^x+1}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{2e^x+1-e^x-1}{e^x+1}}{\frac{2e^x+2-2e^x-1}{e^x+1}}\right) \\ = \ln\left(\frac{e^x}{1}\right) = \ln(e^x) = x.$$

⑤ $f(x) = x^3 - 4x + 2$

1. El pendent de la recta tangent en x és $f'(x) = 3x^2 - 4$
La recta $y = 8x + C$ té pendent 8.

$$3x^2 - 4 = 8; \quad 3x^2 = 12; \quad x^2 = 4, \quad x = \pm 2$$

$y = 8x + C$ ha de passar per $x = 2$, $f(2) = 8 - 8 + 2 = 2$

La recta tangent serà $\begin{cases} 2 = 8 \cdot 2 + C \\ C = -14 \end{cases}$

$$\boxed{y = 8x - 14}$$

$y = 8x + C$ ha de passar per $x = -2$, $f(-2) = -8 + 8 + 2 = 2$

$$2 = 8(-2) + C; \quad C = 18$$

$$\boxed{y = 8x + 18}$$

2. Una recta perpendicular a $y = 8x + 1$ té pendent $m = -\frac{1}{8}$

$$3x^2 - 4 = -\frac{1}{8}; \quad 3x^2 = 4 - \frac{1}{8} = \frac{31}{8}; \quad x = \pm \sqrt{\frac{31}{24}}$$

Si, en els punts $x = \pm \sqrt{\frac{31}{24}}$

3. $\begin{cases} f(-3) < 0 \\ f(2) = 2 > 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{solució a } (-3, 2) \\ f(0) = 2 \\ f(1) = -1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{solució a } (0, 1) \\ f(1) = -1 \\ f(2) = 2 \end{array} \right\}$

$\boxed{\text{solució a } (1, 2)}$