DERIVADES

1. En cada cas, determineu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt donat:
   (a) $f(x) = x^2 - 3x + 1 \quad , \quad (3, 1)$.
   (b) $f(x) = x + e^x \quad , \quad (0, 1)$.
   (c) $f(x) = \sin x \quad , \quad (\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

2. En cada cas, calculeu l'equació d'una recta que sigui tangent a la gràfica de $f(x)$ i paral·lela a la recta donada:
   a) $f(x) = x^3, \quad 3x - y + 1 = 0$ b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x + 2y = 6$

3. Determineu els punt o punts de la gràfica de $y = 4x - x^2$ tals que la recta tangent passa pel punt $(2, 5)$.

4. Calculeu la derivada de les funcions següents
   (a) $f(x) = (3x^2 + 5x)(\sin x + \ln x)$ (b) $f(t) = 3t^2 + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}$ (c) $f(s) = \frac{s^3 + 4s - 1}{s^2 + s + 1}$
   (d) $f(x) = (2x + 1)(\sin x)e^x$ (e) $f(t) = \sqrt[3]{t}(1 + \sqrt{t})$ (f) $f(x) = \frac{(e^x - x^2)(\sin x)}{e^x + x^2}$

5. Calculeu la derivada de les funcions següents
   (a) $f(x) = 2(7 - 3x)^5$ (b) $f(x) = (1 + e^{2x})^3(1 + e^{-x})^2$
   (c) $f(x) = \sin^2\left(\sqrt{x^2 - 5x + 2}\right)$ (d) $f(t) = \frac{3 + \sin^2(2t)}{4 + \cos^4(3t)}$
   (e) $f(x) = \arctan\left(x + \ln^2\left(3x^2 + e^{2x}\right)\right)$ (f) $f(x) = \left((2x + 1)^5 + (x^2 - 1)^6\right)^2$
   (g) $f(s) = \left(\frac{s + 6}{s^2 + 2}\right)^3$ (g) $f(t) = \frac{t}{\sqrt{t^4 + 1}}$

6. La temperatura $T$ d'un aliment en una nevera en funció del temps $t$ en hores és

$$T(t) = \frac{80}{10 + 2t + t^2}$$

   a) Calculeu la variació mitjana de temperatura entre la primera i la segona hora.
   b) Calculeu el ritme de canvi instantani de $T$ als instants $t = 1$ i $t = 2$.

7. El volum d'un globus esfèric de radi $r$ és $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Si el radi creix a un ritme de 0.01 cm. per minut, a quin ritme està canviant el volum a l'instant en què $r = 4$ cm. ?

8. La posició en cada instant $t \geq 0$ d'un objecte que es mou al llarg de l'eix $X$ és

$$x(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 27$$

on $x$ ve donat en metres i $t$ en segons.

a) Calculeu la velocitat mitjana entre els instants $t = 0,5$ i $t = 1,5$

b) Calculeu la velocitat a cada instant $t$.

c) Determineu quan el moviment és cap a l'esquerra i quan cap a la dreta.

d) En quin moment (o moments) l'objecte està *aturat*?

e) Calculeu l'acceleració a cada instant $t$.

f) Les característiques físiques d'aquest objecte aconsellen que l'acceleració o desacceleració que ha de suportar no superi els 25 $\mathrm{m/s^2}$. Quan es compleix aquesta condició?

9. Un home de 180 cm. d'alçada camina a 1m/s allunyant-se d'una farola de 3m. d'alçada. A quina velocitat es mou la seva ombra ?

10. L'efecte combinat de dues resistències elèctriques $R_1$, $R_2$ connectades en paral.lel és una resistència $R$ donada per

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Si se sap que $R_1$ i $R_2$ estan creixent a raó de 1 i 1.5 ohm. per segon, respectivament, calculeu el ritme de canvi de $R$ quan $R_1 = 50$ i $R_2 = 75$.

11. En un sistema de coordenades amb la torre de control com a origen un avió es troba al punt $(0, 1)$ viatjant a 500 Km/h en direcció est i un segon avió es troba al punt $(1, 0)$ viatjant a 800 Km/h en direcció sud.

(a) Determineu les posicions dels dos avions després de 1 hora.

(b) Calculeu la distància que separa els avions després d'un temps $t$.

(c) Quan ha passat exactament 1 hora, els avions s'ajunten o se separen? A quina velocitat?

12. Calculeu els màxims i mínims absoluts de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ en cada cas:

a) $[a, b] = [-3, 1]$ i $f(x) = 5 - 6x^2 - 2x^3$

b) $[a, b] = [-1, 3]$ i $f(x) = 3x^2 - 10x + 7$

c) $[a, b] = [0, 2]$ i $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

d) $[a, b] = [-1, 8]$ i $f(x) = 1 - x^{1/3}$

13. Determineu els intervals de creixement i decreixement de les funcions següents:

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x - 2}$ (b) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 - 9}$

(c) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ (d) $f(x) = x(x + 1)(x + 2)$

(e) $f(x) = \sqrt{3}\,x - \cos(2x)$ (f) $f(x) = (x^3 - 9x)^3$

(g) $f(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2}$ (h) $f(x) = (x + 5)^4(2x + 3)^3$

14. Determineu els intervals de concavitat i convexitat per a les funcions següents
   (a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$ (b) $f(x) = (1-x)^2(1+x)^2$
   (c) $f(x) = x^2 + \sin(2x)$ (d) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

15. Doneu totes les característiques possibles de la gràfica de les funcions:
   (a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{16 - x^2}$ (b) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{16 - x^2}}{4 - x}$
   (c) $f(x) = x + \dfrac{4}{x^2 + 1}$ (d) $f(x) = 3x^4 + 4x^3$
   (e) $f(x) = x + \tan x$, $(-3\pi/2 < x < 3\pi/2)$ (f) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

16. Les vendes anuals d'un producte venen donades per $V(t) = 5.000\,\dfrac{t^2}{8 + t^2}$ on $t$ és el temps en anys a partir d'ara. En quin moment les vendes creixen més ràpidament?

17. Una població animal viu en una illa petita, la població creix ràpidament esgotant els recursos alimentaris i comença a decréixer. Suposeu que la llei que determina el nombre d'individus de l'espècie després de $t$ anys és $N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100$. Determineu:

   a) Quan deixa de créixer la població.
   b) Quin és el valor màxim d'aquesta població?
   c) Quan s'extingeix totalment la població?
   d) Com és la gràfica de la funció $N$?

18. Se sap que $f(0) = 3$ i $2 \leq f'(x) \leq 4$ si $-5 < x < 5$. Entre quins valors pot estar comprès $f(2)$?

19. Utilitzeu propagació d'errors per aproximar les expressions següents:
   a) $\sqrt{2,01}$ b) $\ln(1,03)$ c) $e^{0.2}$

20. Una pizzeria elabora pizzes que haurien de tenir 20cm de radi.

   (a) Si es comet un error de $0,1$ cm. en el radi, utilitzeu propagació de l'error per aproximar l'error resultant en la quantitat de pizza.
   (b) Si el radi s'aproxima amb una precisió del 3 %, doneu una estimació del percentatge d'error en la quantitat de pizza.
   (c) Si es desitja que l'error en la quantitat de pizza no superi el 4%, quin percentatge d'error s'hauria de permetre en el radi?

21. Tres botigues estan situades als punts de coordenades $(-1, 0)$ , $(1, 0)$ i $(0, 1)$. En un punt $(0, y)$, $(0 < y < 1)$ hi ha un magatzem des del qual surten cada matí tres camions cap a les tres botigues. Determineu quin és el valor de $y$ que fa que la despesa de transport sigui mínima.

22. Una pàgina de llibre ha de contenir 24 $\text{cm}^2$ de text. Els marges superior i inferior han de ser $1,5$ cm. i els marges laterals 1 cm. Amb aquestes condicions, quines han de ser les dimensions de la pàgina que requereixen una quantitat mínima de paper?

23. Un pagès es troba al punt $(0, 1)$ amb el seu ramat. Abans de tornar a la granja, situada al punt $(1, 2)$, ha de portar el ramat al riu , representat per l'eix de les $X$'s. Trobeu el recorregut òptim amb i sense Càlcul.

24. Determineu l'equació de la recta que passa pel punt $(3, 2)$ i que forma amb els eixos de coordenades un triangle d'àrea mínima en el primer quadrant.

25. En un mateix carrer hi ha dues discoteques força sorolloses situades a 1 km una de l'altra. Assumint que una de les discoteques és quatre vegades més sorollosa que l'altra i que el nivell de soroll produït per cada discoteca en un lloc concret del carrer és inversament proporcional al quadrat de la distància a la discoteca, determineu quin és el lloc més tranquil del carrer.

26. Obtingueu un dibuix aproximat de la gràfica d'una funció $f$ si se sap:

    - $f(0) = f(6) = f'(3) = f'(5) = 0$
    - $f'(x) < 0$ si $x < 5$, $x \neq 3$
    - $f'(x) > 0$ si $x > 5$
    - $f''(x) > 0$ si $x < 3$ o $x > 4$
    - $f''(x) < 0$ si $3 < x < 4$

27. Calculeu els límits següents aplicant si és necessari la fórmula de l'Hôpital:

    (a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{\ln(2+x)}{x+1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\cos(2x) - 1}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{xe^x}{1-e^x}$

    (d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x^5}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\tan(2x)}$

    (g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1}\right)$

28. Calculeu, en cada cas, el polinomi de Taylor de grau $n$ de $g$ al voltant del punt $a$:

    (a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $a = 0$, $n = 4$.
    (b) $f(x) = \ln x$, $a = 1$, $n = 3$.
    (c) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $a = 0$, $n = 2$.
    (d) $f(x) = e^{-x}$, $a = 0$, $n = 3$.
    (e) $f(x) = \sin(2x)$, $a = 0$, $n = 3$

29. (a) Demostreu que el polinomi de Taylor d'ordre $2n+1$ de $\sin x$ al voltant de 0 és

    $$T_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

    (b) Demostreu que el polinomi de Taylor d'ordre $2n$ de $\cos x$ al voltant de 0 és

    $$T_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

30. Calculeu, el polinomi de Taylor $T_n(x)$ d'ordre $n$ de $f(x)$ al voltant de $x = a$ i doneu estimacions de l'error en cada cas

    (a) $f(x) = e^x$, $a = 0$, $|e^{0,3} - T_4(0,3)|$.
    (b) $f(x) = \sin x$, $a = 0$, $|\sin(\frac{\pi}{10}) - T_3(\frac{\pi}{10})|$.
    (c) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$, $|\sqrt{4.01} - T_2(4.01)|$.

31. Utilitzeu la fórmula del error per determinar $\delta > 0$ tal que les desigualtats següents siguin vàlides per $|x| < \delta$.

    a) $|e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!}| < 10^{-5}$ b) $|\ln(1+x) - (x - \frac{x^2}{2})| < 10^{-4}$

32. Utilitzeu, en cada cas, la fórmula de l'error per determinar $n$ tal que es verifiqui l'estimació donada

    (a) $|\ln(1.3) - T_n(1.3)| \leq 10^{-4}$ $(f(x) = \ln x,\ a = 1)$.

    (b) $|\sin(0.1) - T_{2n+1}(0.1)| \leq 10^{-3}$ $(f(x) = \sin x,\ a = 0)$.

    (c) $|\sqrt{1.2} - T_n(1.2)| \leq 10^{-6}$ $(\ f(x) = \sqrt{x},\ a = 1)$