LÍMITS I CONTINUÏTAT

1. Calculeu, si existeixen, els límits següents:

   (a) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$ (b) $\lim_{x\to 4} \dfrac{|x-4|}{x-4}$ (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-4}{x^2-6x+9}$

   (d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(a+x)^3-a^3}{x}$ (e) $\lim_{x\to 0} \left(x^2+\dfrac{|x|}{x}\right)$ (f) $\lim_{x\to 5} \dfrac{3x^2-13x-10}{2x^2-7x-15}$

2. Fent servir que $\sin x \sim x$ i $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ quan $x \to 0$, calculeu els límits següents:

   (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 x}{x^3+x^4}$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(4x)}$ (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin^2(5x)}$

   (d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+x^6}{\tan^2 x}$ (e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{1-\cos(2x)}$ (f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x+4x}{2x+\sin(2x)}$

3. Calculeu el límits següents:

   (a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(1+x)(5x^2-1)}{x^3+x+5}$ (b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{7x-2}{x^3}$ (c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$

   (d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}+1}$ (e) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-6x}{x+1}$ (f) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1+\sin(3x)\cos(2x)}{x^2}$

4. Aquest problema és útil per resoldre indeterminacions 1^∞. Utilitzant que $\log(1+x) \sim x$ quan $x \to 0$, comproveu que si $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ i $\lim_{x\to a}(f(x)-1)g(x) = b$, llavors

$$\lim_{x\to a} \big(f(x)\big)^{g(x)} = e^b$$

   (Observació: a pot ser ∞)

5. Utilitzeu el problema anterior per calcular els límits següents (totes són indeterminacions 1^∞):

   (a) $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+x+5}{x^2+1}\right)^{3x}$ (b) $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+1}\right)^{\sqrt{x+3}}$

   (c) $\lim_{x\to 0} \big(1+\tan x\big)^{\frac{1}{\sin x}}$ (d) $\lim_{x\to 0} \big(\cos x\big)^{\frac{1}{x^2}}$

6. Determineu les asímptotes horitzontals , verticals i obliqües de les funcions següents, i en el cas de les verticals indiqueu també els corresponents límits laterals.

(a) $f(x) = \dfrac{x+5}{x^3-x}$ (b) $f(x) = \dfrac{2x^2+x+2}{x^2-4x+3}$ (c) $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2-3}{x^2-1}$

(d) $f(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{x^2}$ (e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ (f) $f(x) = xe^{-x}$

7. Determineu el paràmetre a per tal que la funció

$$f(x) = \begin{cases} -|\sin x| - 4 & , \quad x < \pi \\ a|\cos x| - 6 & , \quad x \geq \pi \end{cases}$$

sigui contínua en $\mathbb{R}$.

8. Per a cada una de les funcions $f(x)$ següents, determineu el valor que s'ha de donar a $f(5)$ per tal que siguin funcions contínues en aquest punt

   (a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$

   (b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-5}}$

   (c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$

   (d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-7x+16}-\sqrt{6}}{(x-5)\sqrt{x+1}}$

9. Comproveu que cadascuna de les equacions següents té al menys una solució a l'interval indicat:

   (a) $2x^3 - 4x^2 + 5x - 4 = 0$, $[1, 2]$.

   (b) $\sin x + 2\cos x - x^2 = 0$, $[0, \pi/2]$.

   (c) $x^2 - 2 + \dfrac{1}{2x} = 0$, $[1/4, 1]$.

10. Demostreu que l'equació $x^3 - 4x + 2 = 0$ té tres solucions diferents a l'interval $[-3, 3]$.

11. (a) Comproveu que l'equació $x^3 + x - 1$ té una solució a l'interval $[0, 1]$.

    (b) Aplicant successivament el Teorema de Bolzano, localitzeu la solució amb un error inferior a 0.125.