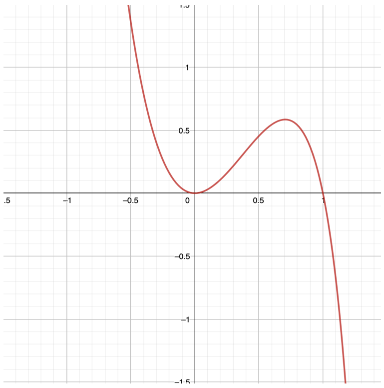
Càlcul I. Primera Prova Parcial. | **Divendres, 20 de novembre 2020.**
Aules C3/011, C3/015 | **De 12:30 a 15:30**

INSTRUCCIONS:

1. Responeu amb claredat d'exposició les següents questions. Totes les respostes han de ser degudament justificades.
2. Primer llegiu totes i cadascuna de les preguntes. Comenceu responent i deixant en net totes aquelles de les que us trobeu més segurs.

PROBLEMES:

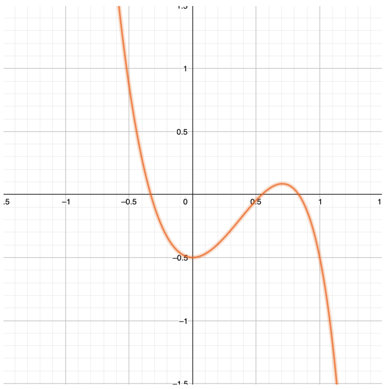
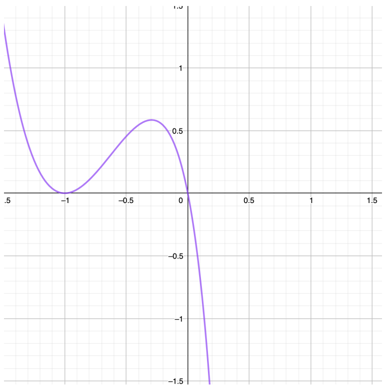
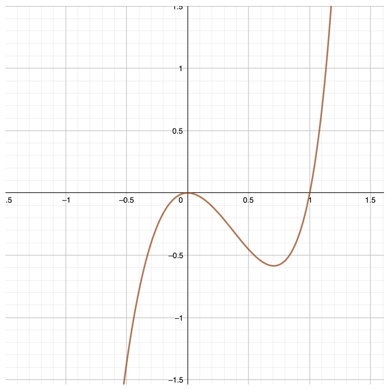
1. [1 punt] Sigui $f(x)$ una funció amb gràfica

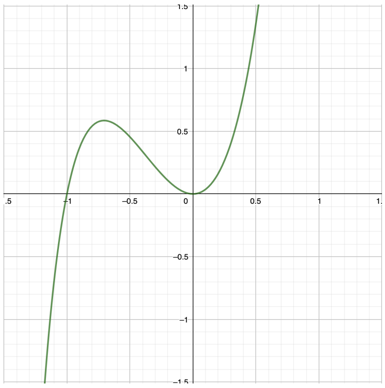


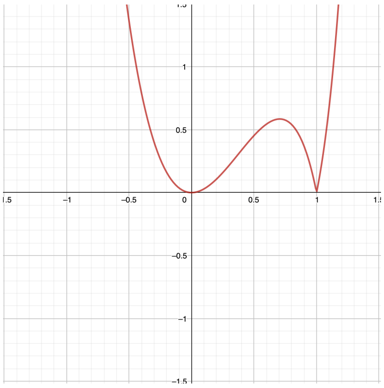
   (a) Té inversa? justifica la resposta.

   (b) Dibuixa les següents funcions: $f(x) - 0.5$, $f(x + 1)$, $-f(x)$, $f(-x)$ i $|f(x)|$.

Solució: No té inversa ja que per exemple, hi ha tres valors de x diferents amb $f(x) = 0.5$. No és injectiva.





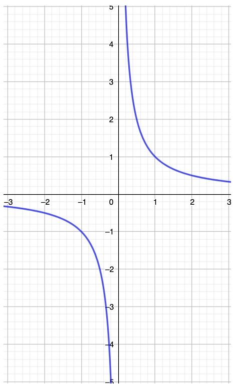
2. [1.5 punts] Considera la funció $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+3}$

   (a) Fes un esbòs de la gràfica de $f(x)$ a partir de la de $\dfrac{1}{x}$ i transformacions elementals.

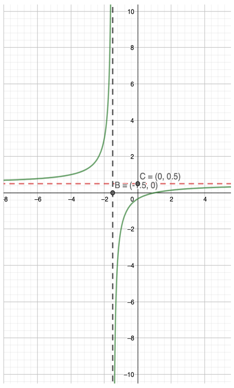
   (b) Té inversa? Si és així calcula-la.

Solució:

(a) Si fem la divisió de polinomis obtenim que $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\frac{5}{4}}{x + \frac{3}{2}}$. Comenem amb la gràcfica de $\dfrac{1}{x}$ que ja coneixem.



Traslladem horitzontalment a l'esquerra per $\dfrac{3}{2}$ i després fem dilatació en eix vertical per $\dfrac{5}{4}$ i simetria respecte l'eix horitzontal ja que hi ha un signe negatiu davant de la fracció i la pugem verticalment en $\dfrac{1}{2}$.



(b) Aïllem x de l'equació $y = \dfrac{x-1}{2x+3}$. Aleshores

$$x - 1 = 2xy - 3y \tag{1}$$
$$x - 2xy = 3y + 1 \tag{2}$$
$$x(1-2y) = 3y + 1 \tag{3}$$
$$x = \frac{3y+1}{1-2y} \tag{4}$$
$$\tag{5}$$

Així

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{1-2x}} \tag{6}$$

3. [1 punt] Calcula el domini de la funció $f(x) = \log_{10}(\sqrt{\frac{3}{x-1} - \frac{5}{x+7}})$.

Solució: El logaritme només està definit per valors estrictament positius, aleshores el domini de la funció $f(x)$ són aquells $x \in \mathbb{R}$ tals que

$$\frac{3}{x-1} - \frac{5}{x+7} > 0$$

Un cop feta la resta de fraccions, $-2\dfrac{x-13}{(x-1)(x+7)} > 0$, o bé $\boxed{\dfrac{x-13}{(x-1)(x+7)} < 0}$.

$$\begin{cases} x - 13 < 0 & \text{si } x \in (-\infty, 13), \\ x - 13 > 0 & \text{si } \in (13, +\infty). \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(x+7) < 0 & \text{si } x \in (-7, 1), \\ (x-1)(x+7) > 0 & \text{si } x \in (-\infty, -7) \cup (1, \infty). \end{cases}$$

Fent una taula,

	$x-13$	$x-1$	$x+7$	$\dfrac{x-13}{(x-1)(x+7)}$
$(-\infty, -7)$	$-$	$-$	$-$	$-$
-7	$-$	$-$	0	
$(-7, 1)$	$-$	$-$	$+$	$+$
1	$-$	0	$+$	
$(1, 13)$	$-$	$+$	$+$	$-$
13	0	$+$	$+$	0
$(13, +\infty)$	$+$	$+$	$+$	$+$

aleshores obtenim que el domini de la funció és

$$\boxed{(-\infty, -7) \cup (1, 13)} \tag{7}$$

4. [2 punts] Calcula els següents límits:

$$(a) \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^3+x} - \sqrt{x^3+1}}{x-1}, \quad (b) \quad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+x}{3+x^2}\right)^{2x-1}$$

Solució:

(a) Si substituim $x = 1$ a l'expressió obtenim $\frac{0}{0}$. Per resoldre l'indeterminació, multipliquem i dividim $\frac{\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3+1}}{x-1}$ per $\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3+1}$. Així

$$\frac{\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3+1}}{x-1} = \frac{(x^3+x)-(x^3+1)}{(x-1)(\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3+1})} = \frac{1}{\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3+1}}$$

Finalment,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3+1}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x^3+x}+\sqrt{x^3+1}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3+1}}{x-1} = \frac{\sqrt{2}}{4}} \qquad (8)$$

(b) En una primera observació veiem que dóna una situació d'indeterminació 1^∞. En aquest cas, per un exercici de la llista de problemes sabem que si $f(x) = \frac{x^2+x}{3+x^2}$ i $g(x) = 2x-1$, aleshores

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+x}{3+x^2}\right)^{2x-1} = e^{\lim_{x\to\infty}(f(x)-1)g(x)}$$

En aquest cas,

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-1)g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-3)(2x-1)}{3+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-7x+3}{x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\dfrac{7}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{3}{x^2}} = 2$$

i

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+x}{3+x^2}\right)^{2x-1} = e^2} \qquad (9)$$

5. [3 punts] Es considera la funció definida per

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+12x+20}{x+1} & \text{si } x < 8, \\ ax^{1/3}e^{-2x+16} & \text{si } x \geq 8. \end{cases}$$

(a) Estudieu la continuitat de la funció $f(x)$ i les seves assímptotes.

(b) Si $a \neq 0$, proveu hi ha un valor $x \leq -3$ pel qual $f(x) = 0$. Per quins valors $x \in [0, +\infty)$ es compleix que $f(x) = 0$?

Solució:

(a) El domini d'aquesta funció és $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. En $x = 8$, la funció serà contínua si

$$\lim_{x\to 8^+} f(x) = \lim_{x\to 8^-} f(x) = f(8)$$

Si fem els càlculs tenim

$$\lim_{x\to 8^-} f(x) = \lim_{x\to 8^-} \frac{x^2+12x+20}{x+1} = 20$$

$$\lim_{x\to 8^+} f(x) = \lim_{x\to 8^-} ax^{1/3}e^{-2x+16} = a8^{1/3}e^{-2\cdot 8+16} = 2a = f(8)$$

Per tant, $f(x)$ serà contínua en $x = 8$ si $20 = 2a$, és a dir, si $a = 10$.

$$\boxed{\text{Si } a = 10\text{, és contínua a } (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty).} \tag{10}$$

$$\boxed{\text{Si } a \neq 10\text{, és conínua a } \mathbb{R} \setminus \{-1, 8\} \text{ i té una discontinuitat de salt en } x = 8.} \tag{11}$$

Anem a calcular les assímptotes. Comencem amb les verticals en el punt $x = -1$.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+12x+20}{x+1} = \frac{9}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+12x+20}{x+1} = \frac{9}{0^+} = +\infty$$

$$\boxed{\text{Assímptota vertical } x = -1} \tag{12}$$

Anem a estudiar les assímptotes horitzontals.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+12x+20}{x+1} = \frac{33}{0^-} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1+\frac{12}{x}+\frac{20}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} ax^{1/3}e^{-2x+16} = \lim_{x\to +\infty} \frac{ax^{1/3}}{e^{2x-16}} = 0$$

ja que en general $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$.

$$\boxed{\text{Assímptota horitzontal a la dreta } y = 0} \tag{13}$$

Per acabar cal veure si hi ha una assímptota obliqua $y = mx + n$ a l'esquerra.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+12x+20}{x(x+1)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1+\frac{12}{x}+\frac{20}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+12x+20}{x+1} - x = \lim_{x\to -\infty} \frac{11x-20}{x+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{11-\dfrac{20}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} = 11$$

$$\boxed{\text{Assímptota obliqua a l'esquerra } y = x + 11} \tag{14}$$

(b) Si $a > 0$, la funció $f(x) = ax^{1/3}e^{-2x+16}$ sempre és positiva si $x > 8$; i si $a < 0$, la funció $f(x) = ax^{1/3}e^{-2x+16}$ sempre és negativa si $x > 8$. A més, per valors $x \in [0, 8]$, és clar que $\dfrac{x^2+12x+20}{x+1}$ sempre és un número positiu. Així:

$$\boxed{\text{No hi ha cap } x \in [0, +\infty) \text{ que compleixi } f(x) = 0} \tag{15}$$

La funció $f(x)$ és contínua en $(-\infty, -3]$. Com que $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, podrem trobar valors $x \in (-\infty, -3]$ tals que $f(x) < 0$. Per exemple, si calculem $f(-100) = -\dfrac{8820}{99} < 0$. Només cal trobar un valor en que la funció és positiva. Si fem $f(-3) = \frac{7}{2} > 0$. Per tant el Teorema de Bolzano per funcions contínues ens assegura que

$$\boxed{f(x) = 0 \text{ per algun valor } x \in [-100, -3].} \tag{16}$$

A més, podem calcular directament quan $f(x) = 0$ si $x \leq -3$, ja que $\frac{x^2 + 12x + 20}{x(x+1)} = 0$ si i només si $x^2 + 12x + 20 = 0$. Per tant, resolent l'equació de segon grau tenim que $f(-10) = 0$.

6. [1.5 punts]

(a) La probabilitat de que un individu de Drosophila Melanogaster visqui més de t dies és

$$S(t) = e^{\frac{-t^3}{100}}$$

Quina és l'edat (número de dies de vida) que supera la meitat de la població? Quin percentatge de la problació supera els 5 dies de vida?

(b) Sigui I la intensitat del so (W/m^2, watts per metre quadrat). El llindar a partir del qual un so és audible és $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$. Els decibels es calculen a partir de la intensitat segons la fórmula

$$D = 10 \log_{10}(\frac{I}{I_0})$$

Tenim una alarma que, començant en $3I_0$ emet un so que a cada segon és $\sqrt{10}$ vegades més alta. Escriu la fórmula de la intensitat $I(t)$ i la dels decibels del so de l'alarma $D(t)$ en el segon t. A partir de quin moment supera el llindar del dolor que és de 130 decibels?

Solució:

(a) Primer ens demanen per quin valor de t, $S(t) = 0.5$ i aïllant obtenim

$$\boxed{t = \sqrt[3]{100 \ln(2)} \approx 4.1 \text{ dies.}} \tag{17}$$

Després ens demanen $S(5) = e^{-1.25} = \frac{1}{e^{1.25}} \approx 0.29$. És a dir,

$$\boxed{29\% \text{ de la població supera els 5 dies de vida.}} \tag{18}$$

(b) Si a cada minut la intensitat es multiplica per $\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$, tenim que $I(t) = 3I_0(10^{\frac{1}{2}})^t = 3I_0 10^{\frac{t}{2}}$. En decibels, apliquem la formula

$$D(t) = 10 \log_{10}(\frac{3I_0 10^{\frac{t}{2}}}{I_0}) = 10 \log_{10}(3 \cdot 10^{\frac{t}{2}}) = 10(\log_{10}(3) + \log_{10}(10^{\frac{t}{2}})) =$$
$$= 10(\log_{10}(3) + \frac{t}{2}) = 10 \log_{10}(3) + 5t$$

$$\boxed{I(t) = 3I_0 10^{\frac{t}{2}}\ W/m^2 \text{ i } D(t) = 10 \log_{10}(3) + 5t \text{ decibels}} \tag{19}$$

Finalment $10 \log_{10}(3) + 5t > 130$. Per

$$\boxed{t > \frac{130 - 10 \log_{10}(3)}{5} \approx 25 \text{ segons,}} \tag{20}$$

la intensitat sobrepassarà el llindar del dolor.